Licence Informatique, semestre 5 — 2014–15
Eléments de logique pour l'informatique (Info 315) — 6 novembre 2014
`http://www.lri.fr/~paulin/Logique`

Partiel - 21 octobre 2014

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages, le barème est indicatif. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles du système G est donné à la fin du sujet.
Inscrivez votre nom sur chaque copie et numérotez-les. **Ne pas cacheter les copies !**

Exercice 1 *Questions de cours (2 points)*

On donnera à chaque fois une justification rapide (1-2 lignes).

1. Quel est le nombre d'interprétations possibles sur un ensemble de n variables propositionnelles. **Aide :** c'est aussi le nombre de lignes d'une table de vérité d'une formule propositionnelle avec n variables.
2. Une formule valide est aussi satisfiable. Vrai ou faux ?
3. Une formule satisfiable est valide. Vrai ou faux ?
4. La formule A est valide si et seulement si $\neg A$ est insatisfiable. Vrai ou faux ?

Correction :

1. *2^n : toutes les fonctions de l'ensemble des variables propositionnelles de taille n dans l'ensemble des booléens de taille 2.*
2. *Vrai : une formule est valide si elle est vraie dans toutes les interprétations, et satisfiable si elle est vraie dans au moins une interprétation.*
3. *Faux, la formule x formée d'une seule variable propositionnelle est satisfiable (vraie dans une interprétation dans laquelle x est vrai mais non valide faux dans une interprétation dans laquelle x est faux)*
4. *Vrai : A est valide ssi elle est vraie dans toute interprétation ssi $\neg A$ est fausse dans toute interprétation c'est-à-dire $\neg A$ est insatisfiable.*

Exercice 2 *Enigme (2 points)*

Trois personnes X, Y et Z veulent chanter. Elles décident que :

a) Si X chante alors Y ne chante pas.
b) Si Y chante alors X et Z chantent.
c) si Z chante alors X ou Y ne chante pas (au moins l'un des deux).

1. Traduire chaque décision sous forme d'une formule propositionnelle (on prendra soin de préciser quelles variables propositionnelles sont introduites.)
2. On suppose que les trois décisions sont satisfaites. Peut-on en déduire que X chante ? que Y ne chante pas ? Justifier votre réponse par une table de vérité ou un raisonnement.

Correction : *On nomme x, y et z des variables propositionnelles qui représentent le fait que X, Y et Z chantent.*

1. *Les décisions se traduisent en les formules suivantes*
   a) $x \Rightarrow \neg y$
   b) $y \Rightarrow (x \wedge z)$

c) $z \Rightarrow (\neg x \vee \neg y)$

2. *On regarde les interprétations dans lesquelles les trois formules sont vraies*

x	y	z	a	b	c
_	F	_	V	V	V
V	V	_	F	_	_
F	V	_	V	F	V

on a donc plusieurs cas dans lesquels les trois décisions sont vérifiées sans que X chante, par exemple si personne ne chante. Par contre on peut en déduire que Y ne chante pas, car dans tous les cas où il chante une des décisions est fausse.

Exercice 3 *Modélisation (3 points)*

On se place sur un langage avec une constante `moi` (la personne qui parle) et trois relations binaires :

— $\texttt{ami}(x, y)$ si x est l'ami de y

— $\texttt{ennemi}(x, y)$ si x est l'ennemi de y (x est mon ennemi correspond donc à la formule $\texttt{ennemi}(x, \texttt{moi})$)

— $x = y$ si x et y sont égaux

1. Traduire en français les formules suivantes :
   (a) $\forall x, \neg\texttt{ami}(x, \texttt{moi}) \Rightarrow \texttt{ennemi}(x, \texttt{moi})$
   (b) $\exists x, \forall y, \neg\texttt{ami}(y, x)$
   (c) $\forall x, \exists y, \texttt{ennemi}(y, x)$
2. Donner les formules logiques qui correspondent aux énoncés suivants :
   (a) Les ennemis de mes amis sont mes ennemis.
   (b) On ne peut être à la fois ami et ennemi.
   (c) J'ai un seul ami. (l'usage du connecteur $\exists!$ n'est pas autorisé)

Correction :

1. *(a) Tous ceux qui ne sont pas mes amis sont mes ennemis*
   (b) Il y a une personne qui n'a pas d'amis
   (c) Tout le monde a un ennemi
2. *(a)* $\forall x\, y, \mathit{ennemi}(x, y) \Rightarrow \mathit{ami}(y, \mathit{moi}) \Rightarrow \mathit{ennemi}(x, \mathit{moi})$
   (b) $\forall x\, y, \mathit{ennemi}(x, y) \Rightarrow \neg\mathit{ami}(x, y)$
   (c) $\exists x, \mathit{ami}(x, \mathit{moi}) \wedge \forall y, \mathit{ami}(y, \mathit{moi}) \Rightarrow x = y$

Exercice 4 *Logique propositionnelle (8 points)*

On s'intéresse ici à des formules qui contiennent le symbole d'équivallence $p \Leftrightarrow q$. On rappelle que $p \Leftrightarrow q$ est défini comme $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Dans la suite x, y et z désignent trois variables propositionnelles.

1. Donner la forme normale conjonctive des formules $(x \Leftrightarrow y)$ et $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. Construire la table de vérité de la formule $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$. Cette formule est-elle valide ? satisfiable ?
3. On considère les formules

— $A \stackrel{\text{def}}{=} (x \Leftrightarrow z) \wedge y$

— $B \stackrel{\text{def}}{=} (y \Leftrightarrow z) \Rightarrow x$

(a) Mettre les formules A et $\neg B$ en forme clausale.

(b) En utilisant la résolution, montrer que la formule B est conséquence logique de A.

4. On considère maintenant des séquents avec des formules contenant le symbole d'équivalence. Soit les deux règles dans lesquelles Γ et Δ sont des ensembles de formules et p et q sont des formules :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \Delta, q \qquad \Gamma, q \vdash \Delta, p}{\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q} \qquad \frac{\Gamma, p, q \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, p, q}{\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta}$$

(a) Montrer que ces deux règles sont correctes (si une interprétation satisfait les deux prémisses alors elle satisfait la conclusion de la règle).

(b) Montrer qu'elles sont inversibles (si une interprétation satisfait la conclusion de la règle alors elle satisfait les deux prémisses).

(c) Construire en utilisant ces règles un arbre de preuve pour le séquent $\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$.

(d) La formule $x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))$ est-elle valide ?

Correction :

1. $x \Leftrightarrow y \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$
$\neg(x \Leftrightarrow y) \equiv \neg((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)) \equiv (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$

2. On construit la table de vérité de la formule, on constate qu'elle est satisfiable (vraie pour toute interprétation qui rend faux un nombre pair de variable propositionnelle mais non valide.

x	y	z	$y \Leftrightarrow z$	$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	F
V	F	V	F	F
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
F	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	F	F	V	F

3. (a) la forme clausale de A donne 3 clauses $C_1 : \neg x \vee z$, $C_2 : x \vee \neg z$, $C_3 : y$;
la forme clausale de $\neg B$ donne 3 clauses $C_4 : \neg y \vee z$, $C_5 : y \vee \neg z$, $C_6 : \neg x$.

(b) la résolution de C_3 et C_4 donne $C_7 : z$; la résolution de C_2 et C_6 donne $C_8 : \neg z$; et on déduit la clause vide de C_7 et de C_8. On en déduit que B est conséquence de A.

4. (a) On fait une table de vérité pour les séquents qui apparaissent dans les règles

Γ	Δ	p	q	$\Gamma, p \vdash \Delta, q$	$\Gamma, q \vdash \Delta, p$	$\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q$	$\Gamma, p, q \vdash \Delta$	$\Gamma \vdash \Delta, p, q$	$\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta$
F	_	_	_	V	V	V	V	V	V
V	V	_	_	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V	V

On constate que lorsque les prémisses de la règle sont vraies, il en est de même de la conclusion.

(b) On constate que lorsque la conclusion de la règle est vraie, il en est de même des deux prémisses.

(c)

$$
(\Leftrightarrow_d)\,\dfrac{(\Leftrightarrow_d)\,\dfrac{(\Leftrightarrow_d)\,\dfrac{\text{H}\,\dfrac{}{x, y \vdash y} \quad \text{H}\,\dfrac{}{x, y \vdash x}}{x, y \vdash x \Leftrightarrow y} \quad (\Leftrightarrow_g)\,\dfrac{\text{H}\,\dfrac{}{x, y \vdash y} \quad \text{H}\,\dfrac{}{x \vdash x, y}}{x, x \Leftrightarrow y \vdash y}}{x \vdash y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)} \quad (\Leftrightarrow_g)\,\dfrac{(\Leftrightarrow_g)\,\dfrac{\text{H}\,\dfrac{}{y, x \vdash x} \quad \text{H}\,\dfrac{}{y \vdash x, y}}{y, x \Leftrightarrow y \vdash x} \quad (\Leftrightarrow_g)\,\dfrac{\text{H}\,\dfrac{}{x \vdash x, y} \quad \text{H}\,\dfrac{}{y \vdash x, y}}{\vdash x, y, x \Leftrightarrow y}}{y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) \vdash x}}{\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))}
$$

(d) La formule est valide car elle est prouvable.

Exercice 5 *Transformation de formules propositionnelles (5 points)*

On considère des formules propositionnelles construites uniquement à partir des formules atomiques $\top$ et $\bot$ et pour chaque variable propositionnelle x, un opérateur binaire $\mathtt{IF}_x(p, q)$ qui se comporte comme la formule p si x est vrai et comme la formule q sinon. On note IP l'ensemble des formules ainsi construites.

Si x, y et z sont des variables propositionnelles, on peut traduire la formule propositionnelle $x \vee (y \wedge \neg z)$ par une formule de IP (notée A dans la suite) :

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{IF}_x(\top, \mathtt{IF}_y(\mathtt{IF}_z(\bot, \top), \bot))$$

On remarque que cette formule est vraie exactement lorsque x est vrai ou lorsque y est vrai et z est faux.

Soit ι une interprétation et p une formule de IP, on définit la fonction $\mathtt{valip}(\iota, p)$ qui représente la valeur de vérité de la formule p pour l'interprétation ι. Cette définition est faite de manière récursive sur la structure de p :

$$
\begin{array}{lll}
\mathtt{valip}(\iota, \top) & = V & \\
\mathtt{valip}(\iota, \bot) & = F & \\
\mathtt{valip}(\iota, \mathtt{IF}_x(p, q)) & = \mathtt{valip}(\iota, p) & \text{si } \iota(x) = V \\
\mathtt{valip}(\iota, \mathtt{IF}_x(p, q)) & = \mathtt{valip}(\iota, q) & \text{si } \iota(x) = F
\end{array}
$$

On vérifie que pour toute interprétation ι, la valeur de vérité de $x \vee (y \wedge \neg z)$ est bien la même que celle de sa traduction A.

1. Suivant le même principe, donner une formule de IP qui corresponde à la traduction de la formule $x \Rightarrow (y \wedge \neg z)$. Justifier que la traduction a la même table de vérité que la formule initiale.
2. Trouver une expression plus simple pour $\mathtt{valip}(\iota, \mathtt{IF}_x(p, p))$ qui ne dépend pas de x.
3. On remarque qu'il est inutile d'avoir deux nœuds $\mathtt{IF}_x$ emboités dans le même terme :
   (a) Soit la formule $B \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{IF}_x(\mathtt{IF}_x(\top, \bot), \mathtt{IF}_y(\mathtt{IF}_z(\bot, \top), \mathtt{IF}_y(\top, \bot)))$ construire la table de vérite de B et montrer que c'est la même que celle de la formule A.
   (b) Construire une fonction $\mathtt{simpl}$ qui étant donnée une formule p de IP une variable x et un booléen $b \in \{V, F\}$ calcule une nouvelle formule qui a la même valeur que p dans toute interprétation ι telle que $\iota(x) = b$. Par exemple si $\iota(x) = V$ on peut simplifier $\mathtt{IF}_x(p, q)$ et le remplacer par la simplification de p.

   On définira la fonction par des équations récursives

$$
\begin{array}{lll}
\mathtt{simpl}(\top, x, b) & = & \\
\mathtt{simpl}(\bot, x, b) & = & \\
\mathtt{simpl}(\mathtt{IF}_x(p, q), x, V) & = & \\
\mathtt{simpl}(\mathtt{IF}_x(p, q), x, F) & = & \\
\mathtt{simpl}(\mathtt{IF}_y(p, q), x, b) & = & \qquad \text{si } x \neq y
\end{array}
$$

4. On suppose maintenant que l'on prend une formule de IP dans laquelle il n'y a pas deux nœuds $\mathtt{IF}_x$ emboités. Comment peut-on tester que cette formule correspond à une tautologie ? Trouver un contre-exemple à votre méthode lorsque deux nœuds $\mathtt{IF}_x$ sont emboités.

Correction :

1. *une traduction de la formule* $x \Rightarrow (y \wedge \neg z)$ *est* $\mathit{IF}_x(\mathit{IF}_y(\mathit{IF}_z(\bot,\top),\bot),\top)$. *On vérifie que la table de vérité est la même :* $x \Rightarrow (y \wedge \neg z)$ *est vrai lorsque* x *est faux ou bien lorsque* x *et* y *sont vrais et* z *est faux.*
2. *La validité de* $\mathit{IF}_x(p,p)$ *est la même que la valeur de* p *lorsque* $\iota(x)$ *est vrai ou faux. donc* $\mathbf{valip}(\iota, \mathit{IF}_x(p,p)) = \mathbf{valip}(\iota, p)$
3. *(a)*

x	y	z	A	B
V	_	_	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	_	F	F

   (b)

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{simpl}(\top, x, b) & = \top \\
\mathbf{simpl}(\bot, x, b) & = \bot \\
\mathbf{simpl}(\mathit{IF}_x(p,q), x, V) & = \mathbf{simpl}(p, x, V) \\
\mathbf{simpl}(\mathit{IF}_x(p,q), x, F) & = \mathbf{simpl}(q, x, F) \\
\mathbf{simpl}(\mathit{IF}_y(p,q), x, b) & = \mathit{IF}_y(\mathbf{simpl}(p,x,b), \mathbf{simpl}(q,x,b)) \quad \textit{si } x \neq y
\end{array}$$

4. *Il suffit de vérifier que toutes les feuilles sont de la forme* $\top$ *(c'est-à-dire qu'il n'y a pas de* $\bot$*) en effet on aura alors que* $\mathbf{valip}(\iota, p)$ *vaut toujours vrai. C'est une condition qui est suffisante. Elle n'est pas nécessaire si on autorise deux nœuds* IF_x *sur la même branche comme dans* $\mathit{IF}_x(\mathit{IF}_x(\top,\bot),\top)$.

   Elle est nécessaire si on n'a pas deux fois le même nœud IF_x. *En effet on montre alors qu'on peut reconstruire à partir d'une branche qui conduit à la feuille* $\bot$ *une interprétation qui invalide la formule.*

Rappel des règles logiques du système G

hypothèse	$(\textsc{Hyp})\dfrac{}{A, \Gamma \vdash \Delta, A}$	
	gauche	droite
$\bot$	$\dfrac{}{\bot, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}$
$\top$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\top, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$\wedge$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$