Exercices de révision

Exercice 1 *Logique propositionnelle.* Soit la formule P définie comme $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.

1. Donner la table de vérité de la formule P.
2. Dire si la formule est valide, satisfiable, insatisfiable ?
3. La formule P a-t-elle un modèle ? si oui lequel ?
4. Donner la forme normale conjonctive et la forme normale disjonctive de la formule P.

Correction :

1. *Table de vérité :*

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$
_	_	V			V
F	_	F			V
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F

2. *La formule n'est pas valide (une ligne de la table de vérité où elle est fausse), elle est satisfiable (une ligne où elle est vraie) et donc elle n'est pas insatisfiable.*
3. *La formule a plusieurs modèles, par exemple* $\{p \mapsto V; q \mapsto V; r \mapsto V\}$
4. *Forme normale conjonctive qui exprime que l'on n'est pas sur la ligne où la valeur de la formule est fausse :* $\neg p \vee q \vee r$. *C'est aussi une forme normale disjonctive (parmi d'autres).*

Exercice 2 *Enigme.* Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Questions

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Correction :

1. *On introduit des variables propositionnelles a, b et c qui représentent le fait que Albert (a), Bernard (b) et Charles (c) prennent un dessert. On traduit ainsi le problème :*
   (a) $a \Rightarrow b$
   (b) $(b \wedge \neg c) \vee (\neg b \vee c)$
   (c) $a \vee c$
   (d) $c \Rightarrow a$

2. *On peut faire une table de vérité pour regarder tous les modèles possibles :*

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(b \wedge \neg c) \vee (\neg b \vee c)$	$a \vee c$	$c \Rightarrow a$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V

La seule interprétation qui rend vrai les quatre affirmations correspond à la deuxième ligne dans laquelle Albert et Bernard commandent un dessert mais pas Charles.
Par contre si on relache l'une des contraintes alors il y a à chaque fois un deuxième modèle qui apparaît. On ne peut donc conclure.

Exercice 3 *Connecteur de Sheffer.* On définit le connecteur de Sheffer noté | (barre de Sheffer, ou encore NAND) par : $p \mid q \stackrel{\text{def}}{=} \neg(p \wedge q)$

1. Donner la table de vérité de la formule $(p \mid q)$
2. Donner la table de vérité de la formule $((p \mid q) \mid (p \mid q))$
3. On veut maintenant exprimer les connecteurs usuels en utilisant la barre de Sheffer, et rien qu'elle.
   (a) Donner la table de vérité de la formule $(p \mid p)$ et en déduire que le connecteur $\neg$ peut être défini en n'utilisant que la barre de Sheffer.
   (b) Trouver une formule équivalente à $p \vee q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
   (c) Trouver une formule équivalente à $p \Rightarrow q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).

Correction :

1.

p	q	$(p \mid q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	V	V

2. on retrouve la table de vérité de $p \wedge q$.

p	q	$(p\mid q)\mid(p\mid q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	V	F

3. (a) On peut poser $\neg p = (p \mid p)$

p	$(p\mid p)$
V	F
F	V

(b) on a $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \mid \neg q)$ on en déduit un codage de $p \vee q$ qui est : $(p\mid p)\mid(q\mid q)$

(c) on a $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv p \mid \neg q$ et donc on en déduit un codage de $p \Rightarrow q$ qui est : $p\mid(q\mid q)$

Exercice 4 *Fonction sur les formules.*

1. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `estClause` qui étant donnée une formule P renvoie `vrai` si P est une clause et `faux` sinon.
2. Utiliser cette fonction pour définir une fonction `estFNC` qui étant donnée une formule P renvoie `vrai` si P est en forme normale conjonctive et `faux` sinon.

Correction :

1.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathtt{estClause}(\top) & = & \mathtt{vrai} & \\
\mathtt{estClause}(\bot) & = & \mathtt{vrai} & \\
\mathtt{estClause}(x) & = & \mathtt{vrai} & \\
\mathtt{estClause}(\neg P) & = & \mathtt{vrai} & \textit{si } P \textit{ est une formule atomique} \\
\mathtt{estClause}(\neg P) & = & \mathtt{faux} & \textit{si } P \textit{ n'est pas une formule atomique} \\
\mathtt{estClause}(P_1 \lor P_2) & = & \multicolumn{2}{l}{\textbf{si } \mathtt{estClause}(P_1) = \mathtt{vrai} \textbf{ alors } \mathtt{estClause}(P_2) \textbf{ sinon } \mathtt{faux}} \\
\mathtt{estClause}(P_1 \land P_2) & = & \mathtt{faux} & \\
\mathtt{estClause}(P_1 \Rightarrow P_2) & = & \mathtt{faux} &
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathtt{estFNC}(\top) & = & \mathtt{vrai} & \\
\mathtt{estFNC}(\bot) & = & \mathtt{vrai} & \\
\mathtt{estFNC}(x) & = & \mathtt{vrai} & \\
\mathtt{estFNC}(\neg P) & = & \mathtt{vrai} & \textit{si } P \textit{ est une formule atomique} \\
\mathtt{estFNC}(\neg P) & = & \mathtt{faux} & \textit{si } P \textit{ n'est pas une formule atomique} \\
\mathtt{estFNC}(P_1 \lor P_2) & = & \multicolumn{2}{l}{\textbf{si } \mathtt{estClause}(P_1) = \mathtt{vrai} \textbf{ alors } \mathtt{estClause}(P_2) \textbf{ sinon } \mathtt{faux}} \\
\mathtt{estFNC}(P_1 \land P_2) & = & \multicolumn{2}{l}{\textbf{si } \mathtt{estFNC}(P_1) = \mathtt{vrai} \textbf{ alors } \mathtt{estFNC}(P_2) \textbf{ sinon } \mathtt{faux}} \\
\mathtt{estClause}(P_1 \Rightarrow P_2) & = & \mathtt{faux} &
\end{array}
$$

Exercice 5 *Preuve dans le système G.* En utilisant des arbres de dérivation dans le système G pour les formules suivantes, dire si elles sont valides ou non :

1. $\vdash ((p \land q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \lor q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $\vdash ((p \land q) \Rightarrow r) \land (\neg p \lor q) \Rightarrow p$

Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\neg p \lor q), p \vdash r, p}\,\text{HYP} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash r, q, p}\,\text{HYP}}{\neg p, p \vdash r, q}\,\neg g \quad \dfrac{}{q, p \vdash r, q}}{(\neg p \lor q), p \vdash r, q}\,\lor g}{(\neg p \lor q), p \vdash r, p \land q}\,\land d \quad \dfrac{}{r, (\neg p \lor q), p \vdash r}\,\text{HYP}}{((p \land q) \Rightarrow r), (\neg p \lor q), p \vdash r}\,\Rightarrow g}{((p \land q) \Rightarrow r), (\neg p \lor q) \vdash (p \Rightarrow r)}\,\Rightarrow d}{((p \land q) \Rightarrow r) \vdash (\neg p \lor q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)}\,\Rightarrow d}{\vdash ((p \land q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \lor q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)}\,\Rightarrow d
$$

Les feuilles de l'arbre correspondent à des règles hypothèses donc la formule est valide.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash p, p, p$}
\AxiomC{$\vdash p, q, p$}
\LeftLabel{$\wedge d$}
\BinaryInfC{$\vdash p, p \wedge q, p$}
\LeftLabel{$\neg d$}
\UnaryInfC{$\neg p \vdash p, p \wedge q$}
\AxiomC{$q \vdash p, p$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{HYP}
\UnaryInfC{$q \vdash p, q$}
\LeftLabel{$\wedge d$}
\BinaryInfC{$q \vdash p, p \wedge q$}
\LeftLabel{$\vee g$}
\BinaryInfC{$(\neg p \vee q) \vdash p, p \wedge q$}
\AxiomC{$r \vdash p, p$}
\LeftLabel{$\neg g$}
\UnaryInfC{$r, \neg p \vdash p$}
\AxiomC{$r, q \vdash p$}
\LeftLabel{$\vee g$}
\BinaryInfC{$r, (\neg p \vee q) \vdash p$}
\BinaryInfC{$((p \wedge q) \Rightarrow r), (\neg p \vee q) \vdash p$}
\LeftLabel{$\wedge g$}
\UnaryInfC{$((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg p \vee q) \vdash p$}
\LeftLabel{$\Rightarrow d$}
\UnaryInfC{$\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow p$}
\end{prooftree}
$$

On observe sur cet arbre qu'il y a au moins une feuille qui n'est pas une hypothèse, par exemple $\vdash p, p, p$ *qui n'est pas vrai si* $p = F$. *Donc la formule n'est pas valide.*