Exercices de révision

Exercice 1 *Logique propositionnelle.* Soit la formule P définie comme $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.

1. Donner la table de vérité de la formule P.
2. Dire si la formule est valide, satisfiable, insatisfiable ?
3. La formule P a-t-elle un modèle ? si oui lequel ?
4. Donner la forme normale conjonctive et la forme normale disjonctive de la formule P.

Exercice 2 *Enigme.* Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Questions

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?
3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ?

Exercice 3 *Connecteur de Sheffer.* On définit le connecteur de Sheffer noté | (barre de Sheffer, ou encore NAND) par : $p \mid q \stackrel{\text{def}}{=} \neg(p \wedge q)$

1. Donner la table de vérité de la formule $(p \mid q)$
2. Donner la table de vérité de la formule $((p \mid q) \mid (p \mid q))$
3. On veut maintenant exprimer les connecteurs usuels en utilisant la barre de Sheffer, et rien qu'elle.
   (a) Donner la table de vérité de la formule $(p \mid p)$ et en déduire que le connecteur $\neg$ peut être défini en n'utilisant que la barre de Sheffer.
   (b) Trouver une formule équivalente à $p \vee q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
   (c) Trouver une formule équivalente à $p \Rightarrow q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).

Exercice 4 *Fonction sur les formules.*

1. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `estClause` qui étant donnée une formule P renvoie `vrai` si P est une clause et `faux` sinon.
2. Utiliser cette fonction pour définir une fonction `estFNC` qui étant donnée une formule P renvoie `vrai` si P est en forme normale conjonctive et `faux` sinon.

Exercice 5 *Preuve dans le système G.* En utilisant des arbres de dérivation dans le système G pour les formules suivantes, dire si elles sont valides ou non :

1. $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow p$