

Exercices de révision

Exercice 1 *Modélisation*

On se place sur un langage avec une constante `moi` (la personne qui parle) et trois relations binaires :

- `ami(x, y)` si x est l'ami de y
- `ennemi(x, y)` si x est l'ennemi de y (x est mon ennemi correspond donc à la formule `ennemi(x, moi)`)
- $x = y$ si x et y sont égaux

1. Traduire en français les formules suivantes :
 - (a) $\forall x, \neg \text{ami}(x, \text{moi}) \Rightarrow \text{ennemi}(x, \text{moi})$
 - (b) $\exists x, \forall y, \neg \text{ami}(y, x)$
 - (c) $\forall x, \exists y, \text{ennemi}(y, x)$
2. Donner les formules logiques qui correspondent aux énoncés suivants :
 - (a) Les ennemis de mes amis sont mes ennemis.
 - (b) On ne peut être à la fois ami et ennemi.
 - (c) J'ai un seul ami. (l'usage du connecteur $\exists!$ n'est pas autorisé)

Exercice 2 *Logique propositionnelle.* Soit la formule P définie comme $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.

1. Donner la table de vérité de la formule P .
2. Dire si la formule est valide, satisfiable, insatisfiable?
3. La formule P a-t-elle un modèle? si oui lequel?
4. Donner la forme normale conjonctive et la forme normale disjonctive de la formule P .

Exercice 3 *Enigme, d'après Smullyan*

Une femme qui cherche un mari présente à ses prétendants 3 coffres numérotés de 1 à 3. Un seul de ces coffres contient son portrait qu'il faut découvrir. Chaque coffre comporte une inscription :

1. Le portrait est dans ce coffre
2. Le portrait n'est pas dans ce coffre
3. Le portrait n'est pas dans le coffre 1

Questions. On introduit des variables propositionnelles P_1 pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 1 et P_2 pour représenter le fait que le portrait est dans le coffre 2.

1. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui est vraie exactement lorsque le portrait est dans le coffre 3.
2. Donner une formule qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui représente le fait que le portrait est exactement dans un des coffres.
3. Donner des formules I_1 , I_2 et I_3 qui utilisent les variables P_1 et P_2 et qui représentent les inscriptions sur chacun des coffres.
4. Sachant qu'une seule des formules I_1 , I_2 et I_3 est vraie, en déduire dans quel coffre est caché le portrait.

Exercice 4 *Connecteur de Sheffer*. On définit le connecteur de Sheffer noté $|$ (barre de Sheffer, ou encore NAND) par : $p | q \stackrel{\text{def}}{=} \neg(p \wedge q)$

1. Donner la table de vérité de la formule $(p | q)$
2. Donner la table de vérité de la formule $((p | q) | (p | q))$
3. On veut maintenant exprimer les connecteurs usuels en utilisant la barre de Sheffer, et rien qu'elle.
 - (a) Donner la table de vérité de la formule $(p | p)$ et en déduire que le connecteur $\neg$ peut être défini en n'utilisant que la barre de Sheffer.
 - (b) Trouver une formule équivalente à $p \vee q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
 - (c) Trouver une formule équivalente à $p \Rightarrow q$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
4. Définir par des équations récursives une fonction **shef** qui étant donnée une formule propositionnelle construite sur les connecteurs habituels, la transforme en une formule qui ne contient que des variables propositionnelles et la barre de Sheffer.
5. Donner le résultat de **shef** $(x \vee (y \vee z))$.
6. Si n est le nombre de connecteurs logiques dans la formule P , quel est l'ordre de grandeur du nombre de barres de Sheffer dans la formule **shef** (P) en fonction de n .
7. On veut construire des règles du système G pour la barre de Sheffer. On introduit la règle droite suivante

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A | B, \Delta}$$

- (a) Montrer que cette règle est correcte et inversible, c'est-à-dire que le séquent $\Gamma, A, B \vdash \Delta$ est vrai pour une interprétation I si et seulement si $\Gamma \vdash A | B, \Delta$ est vrai dans la même interprétation.
- (b) En utilisant une forme équivalente à $A | B$ à l'aide des connecteurs usuels, proposer une règle gauche pour $A | B$, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{\dots}{\Gamma, A | B \vdash \Delta} \dots$$

qui soit correcte et inversible (indication : il y a deux séquents en prémisse de la règle).

Exercice 5 *Preuve dans le système G*. En utilisant des arbres de dérivation dans le système G pour les formules suivantes, dire si elles sont valides ou non :

1. $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg p \vee q) \Rightarrow p$