Correction devoirs

Exercice 1 *Minimisation.* On se donne un prédicat T sur les entiers naturels et on cherche à justifier l'existence d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = n \quad \text{si } T(n) \qquad f(n) = f(n+1) \quad \text{si } \neg T(n)$$

1. Donner une définition par clôture de la relation $F(n, m)$ correspondant à cette définition récursive (ie $F(n, m) \Leftrightarrow f(n) = m$).
2. Écrire le principe d'induction associé à cette définition par clôture.
3. Montrer par induction sur la relation que si $F(n, m)$ est vérifié alors $n \leq m \wedge T(m)$.
4. Prouver par induction que la relation $F(n, m)$ est fonctionnelle.
5. À quelle condition sur $T(n)$ cette relation décrit-elle une fonction totale ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\exists m, F(n, m)) \Leftrightarrow (\exists m, n \leq m \wedge T(m))$. On pourra commencer par prouver $\forall k\, n, T(n+k) \Rightarrow \exists m, F(n, m)$ par récurrence sur l'entier k et utiliser le résultat de la question 3.
7. Comment peut-on caractériser la valeur calculée par $f(n)$?

Correction :

1. *On ne sait pas encore s'il existe une fonction f qui vérifie les équations, on commence par définir par des règles d'inférence une relation binaire F correspondant au graphe de la fonction, puis on montrera que cette relation est fonctionnelle.*

$$\frac{T(n)}{F(n, n)} \qquad \frac{\neg T(n) \quad F(n+1, m)}{F(n, m)}$$

2. *Principe d'induction simple associé :*
   Soit $P(n, m)$ une propriété quelconque, si :
   (a) $\forall n, T(n) \Rightarrow P(n, n)$
   (b) $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow P(n+1, m) \Rightarrow P(n, m)$

   alors $\forall n\, m, F(n, m) \Rightarrow P(n, m)$
3. *On doit prouver que* $\forall n\, m, F(n, m) \Rightarrow n \leq m \wedge T(m)$ *On applique le principe d'induction simple précédent en prenant* $P(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} n \leq m \wedge T(m)$.
   Le principe d'induction dans lequel on a remplacé $P(n, m)$ par la propriété souhaitée nous dit que si les deux conditions suivantes sont vérifiées
   (a) $\forall n, T(n) \Rightarrow (n \leq n \wedge T(n))$
   (b) $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow (n \leq m + 1 \wedge T(m)) \Rightarrow (n \leq m \wedge T(m))$

   alors $\forall n\, m, F(n, m) \Rightarrow (n \leq m \wedge T(m))$

   Les propriétés (a) et (b) sont triviales et on a donc bien le résultat voulu.

4. Pour montrer que F est fonctionnelle, on doit prouver la propriété suivante

$$\forall n\, m\, p, F(n,m) \Rightarrow F(n,p) \Rightarrow m = p$$

On va appliquer le principe d'induction associé à $F(n,m)$ sur la propriété $P(n,m) = \forall p, F(n,p) \Rightarrow m = p$. On aura besoin du principe d'inversion de $F(n,m)$ qui nous dit que si $F(n,m)$ est vérifié alors forcément une des deux règles de définition s'applique et donc soit $F(n,m)$ est prouvé par la première règle et $(T(n) \wedge n = m)$, soit il est prouvé par la seconde règle et $(\neg T(n) \wedge F(n+1,m))$ est vrai. Au final on a : $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow (T(n) \wedge n = m \vee \neg T(n) \wedge F(n+1,m))$

- *Cas 1 : $\forall n, T(n) \Rightarrow P(n,n)$ s'écrit $\forall n, T(n) \Rightarrow \forall p, F(n,p) \Rightarrow n = p$ qui est une conséquence du principe d'inversion.*
- *Cas 2 : $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow P(n+1,m) \Rightarrow P(n,m)$ qui s'écrit $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow (\forall p, F(n+1,p) \Rightarrow m = p) \Rightarrow \forall p, F(n,p) \Rightarrow m = p$. On applique le principe d'inversion à l'hypothèse $F(n,p)$ en tenant compte du fait que $\neg T(n)$ on en déduit $F(n+1,p)$ et d'après l'hypothèse de récurrence $(\forall p, F(n+1,p) \Rightarrow m = p)$ on en déduit $m = p$ qui est le résultat attendu.*

5. L'application $f(n)$ est définie seulement s'il existe un m plus grand que n qui vérifie $T(m)$ (sinon il n'y a pas de moyen de terminer l'arbre de preuve).

6. On a déjà montré $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow n \leq m \wedge T(m)$. On en déduit aisément un sens de l'équivalence :

$$(\exists m, F(n,m)) \Rightarrow (\exists m, n \leq m \wedge T(m))$$

en effte, on suppose $\exists m, F(n,m)$, par élimination on a un m tel que $F(n,m)$ et donc $n \leq m \wedge T(m)$, il suffit de prendre ce m comme témoin pour l'existentielle et on a montré $\exists m, n \leq m \wedge T(m)$.

Dans l'autre sens, on va montrer que $\forall m, n \leq m \wedge T(m) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$.

On commence par faire une preuve par récurrence sur k de la propriété $P(k) \stackrel{\text{def}}{=} \forall n, T(n+k) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$.

- *Pour $k = 0$, il faut montrer $\forall n, T(n) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$ qui est vérifié en prenant $m_0 = n$.*
- *On suppose ensuite la propriété vraie pour k, on a donc $\forall n, T(n+k) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$ et on veut la montrer pour $k+1$: $\forall n, T(n+k+1) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$. Soit n, si $T(n)$ est vérifié alors on prend $m_0 = n$. Sinon on applique l'hypothèse de récurrence pour $n+1$ et on trouve $\exists m_0, F(n+1,m_0)$. Soit m_0 tel que $F(n+1,m_0)$, comme $\neg T(n)$ on en déduit $F(n,m_0)$.*

On en déduit que $\forall nk, T(n+k) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$ et donc $\forall m, n \leq m \wedge T(m) \Rightarrow \exists m_0, F(n,m_0)$. en remarquant que si $n \leq m$ alors $m = n + (m-n)$ et en appliquant le théorème précédent avec $k = m - n$.

7. $f(n)$ calcule le plus petit entier m tel que $n \leq m$ et $T(m)$. C'est une fonction partielle qui n'est totale que si une infinité d'entiers vérifie le prédicat T.

Exercice 2 *Récurrences Simples.*

Dans les questions suivantes, vous devrez rédigez une récurrence classique pour montrer les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $\forall x \neq 1, 1 + x + x^2 \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Correction :

1. *Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme suit :*
   $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout n.
   - ***Initialisation*** *:* $\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.
     $P(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** *: Soit n tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est également.*
     $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$
     Notre hypothèse de récurrence nous dit que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*. Du coup, on a :*
     $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2+(n^2+n)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6n^2+12n+6+2n^3+n^2+2n^2+n}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\end{aligned}$$
     D'un autre côté, on a :
     $$\begin{aligned}\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\end{aligned}$$
     On a donc $P(n+1)$ également vraie.
   - ***Conclusion*** *: On a $P(0)$ vraie et $\forall n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
     On a bien pour tout n, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. *Soit $x \neq 1$ quelconque. Posons $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme suit :*
   $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
   Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout n.
   - ***Initialisation*** *:* $\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{x-1}{x-1}$.
     $P(0)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** *: Soit n tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est également.*
     $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x^k$
     Notre hypothèse de récurrence nous dit que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$*. Du coup, on a :*
     $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= x^{n+1} + \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+1}(x-1)+x^{n+1}-1}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+2}-x^{n+1}+x^{n+1}-1}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+2}-1}{x-1}\end{aligned}$$
     On a donc $P(n+1)$ également vraie.
   - ***Conclusion*** *: On a $P(0)$ vraie et $\forall n$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme x a été choisi de manière quelconque, on a bien pour tout $x \neq 1$ et pour tout n,* $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Exercice 3 *Récurrences Fortes.*

Dans les questions suivantes, vous devrez rédigez une récurrence forte pour montrer les propriétés suivantes sur n. Pour rappel, le schéma d'une récurrence forte sur la propriété P se fait en deux étapes :
- Montrer que $P(0)$ est vrai.
- Soit n tel que pour tout $k \leq n$, $P(k)$ est vrai. Montrer que $P(n+1)$ est également vrai.

Questions.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$
Montrez par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n, v_{n+1} = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum\limits_{i=k}^{n} v_k \end{cases}$$
(a) Calculez v_1, v_2, v_3, v_4.
(b) Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, $v_n = 2^{n-1}$.
(Vous pourrez utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice 2.)
3. Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, il existe deux entiers p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Correction :

1. *Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme suit :*
$u_n = 1 + 2^n$
Montrons par récurrence forte que $P(n)$ est vraie pour tout n.
   - ***Initialisation*** *: $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^1$.*
   $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies. (On montre ici $P(0)$ ET $P(1)$ car dans la récurrence, on aura besoin de $P(n)$ ET $P(n-1)$ pour montrer $P(n+1)$, on devra donc prendre $n > 0$.)
   - ***Hérédité*** *: Soit $n > 0$ tel que, pour tout $k \leq n$, $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est également.*
   $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$
   Comme $P(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$ et que $n > 0$, on a $P(n)$ et $P(n-1)$ vraies : $u_n = 1+2^n$ et $u_{n-1} = 1 + 2^{n-1}$.
   Du coup, on a :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(1+2^n) - 2(1+2^{n-1}) \\ &= 3 + 3 \times 2^n - 2 - 2^n \\ &= 1 + 2 \times 2^n \\ &= 1 + 2^{n+1} \end{aligned}$$
   On a donc $P(n+1)$ également vraie.
   - ***Conclusion*** *: On a $P(0)$ et $P(1)$ vraies, et $\forall n > 0$, $(\forall k \leq n, P(k)) \Rightarrow P(n+1)$, on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien pour tout n $u_n = 1 + 2^n$.*
2. *(a)* $v_1 = v_0 = 1$, $v_2 = v_0 + v_1 = 2$, $v_3 = v_0 + v_1 + v_2 = 4$, $v_4 == v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = 8$
(b) Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \geq 1$ comme suit :
$v_n = 2^{n-1}$
Montrons par récurrence forte que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
   - ***Initialisation*** *: $v_1 = 1 = 2^{1-1}$.*
   $P(1)$ est vraie.

- ***Hérédité*** *: Soit $n \geq 1$ tel que, pour tout $k \in [1, n]$, $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est également.*
  $v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k$
  Comme $P(k)$ est vraie pour tout $1 \leq k \leq n$, on a pour tout $1 \leq k \leq n$: $v_k = 2^{k-1}$.
  Du coup, on a :
  $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} v_k \\ &= v_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j && \text{en remplaçant } k \text{ par } j+1 \\ &= 1 + \frac{2^n - 1}{2-1} && \text{en utilisant le résultat de la question 2 de l'exercice 2 avec } x = 2 \\ &= 1 + 2^n - 1 \\ &= 2^n \end{aligned}$$
  On a donc $P(n+1)$ également vraie.
- ***Conclusion*** *: On a $P(1)$ vraie, et $\forall n \geq 1$, $(\forall k \in [1, n], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$, on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 1$. On a bien pour tout $n \geq 1$ $v_n = 2^{n-1}$.*

Remarque *: On aurait pu faire une récurrence simple en remarquant que*

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_n + \sum_{k=0}^{n-1} v_k = 2v_n$$

3. *Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \geq 1$ comme suit :*
   Il existe deux entiers p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.
   Montrons par récurrence forte que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
   - ***Initialisation*** *: $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, avec p=q=1, ça marche.*
     $P(1)$ est vraie.
   - ***Hérédité*** *: Soit $n \geq 1$ tel que, pour tout $k \in [1, n]$, $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est également.*
     On a deux cas, soit $n+1$ est pair soit il est impair :
     - *Si $n+1$ est pair, $n+1 = 2 \times \frac{n+1}{2}$. On a $1 \leq \frac{n+1}{2} \leq n$, on peut utiliser la propriété de récurrence sur $k = \frac{n+1}{2}$:*
       Il existe p' et q' tels que $\frac{n+1}{2} = 2^{p'}(2q'+1)$.
       En posant $p = p' + 1$ et $q' = q$, on a bien $n+1 = 2^p(2q+1)$.
     - *Si $n+1$ est impair, en posant $p = 0$ et $q = \frac{n}{2}$, on a bien $n+1 = 2^p(2q+1)$.*

     On a donc $P(n+1)$ également vraie.
   - ***Conclusion*** *: On a $P(1)$ vraie, et $\forall n \geq 1$, $(\forall k \in [1, n], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$, on a donc $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 1$. On a bien l'existence pour tout $n \geq 1$ de deux entiers p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.*