Licence STS, semestre 4 — 2013–14
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 5 avril 2014
http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo

Devoir maison

Ce devoir est un entrainement pour le tp noté du 30 avril et doit pouvoir être réalisé en moins de 2 heures.

Informations pratiques

– Ce devoir est à rendre sous forme d'un fichier Coq commenté envoyé avant le 29 avril par e-mail à votre chargée de TP : `atafat@lri.fr`
– Aucun squelette n'est fourni.
– Si vous n'arrivez pas à faire une question ou finir complètement une preuve, vous pouvez utiliser la tactique `admit` pour ignorer un but et passer à la suite. Attention : vous n'aurez pas les points quand `admit` est utilisée, surtout si elle est utilisée pour admettre un énoncé faux !
– Vous êtes fortement encouragés à poser des questions par mail le plus tôt possible.
– Vous pouvez travailler en binôme, auquel cas vous ne rendrez qu'un seul fichier avec les deux noms. Les trop fortes similitudes entre deux fichiers seront sanctionnées, si le décalage entre la note de devoir et la note de TP noté est trop importante, la note de devoir pourra être neutralisée.

Exercice 1 *Déduction naturelle*

Pour les énoncés suivants, trouver ceux qui sont vrais et les démontrer. Expliquer pourquoi les autres ne sont pas montrables.

```
1.  forall A B : Prop, A -> B -> A
2.  forall A B C : Prop, (A -> B -> C) -> (A -> B) -> A -> C
3.  forall A B C : Prop, (B -> C) -> (A -> B) -> A -> C
4.  forall A B : Prop, A /\ B -> B /\ A
5.  forall A B : Prop, A \/ B -> B \/ A
6.  forall A B C D : Prop, (A -> C) /\ (B -> D) -> (A \/ B) -> C /\ D
7.  forall A : Prop, A -> ~ ~ A
8.  forall A B : Prop, (A \/ ~ B) /\ B -> A
9.  (forall x; nat, p x -> q x) -> q 1 -> p 1
10. forall (X:Set) (A B: X -> Prop), (forall x: X, A x /\ B x)
             <-> (forall x:X, A x) /\ (forall x:X, B x)
```

Exercice 2 *Le club écossais*

Il existe en Ecosse un club très fermé qui obéit aux règles suivantes :
– Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.
– Tout membre porte un kilt ou ne porte pas de chaussettes rouges.
– Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
– Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais.
– Tout membre qui porte un kilt est écossais et marié.
– Tout membre écossais porte un kilt.

On souhaite prouver que ce club est si fermé qu'il ne peut accepter personne !
Pour formaliser le problème, on introduit les ensembles et prédicats suivants

```
Parameter X : Type. (* les membres du club *)
Parameters Ecossais Kilt ChaussettesRouges SortDimanche Marié : X -> Prop.
```

1. Traduire chaque phrase sous forme d'une propriété logique que l'on nommera `Fact`. Par exemple, la première phrase devient

   ```
   Definition Fact1 := forall x:X, ~ (Ecossais x) -> ChaussettesRouges x.
   ```

définir de manière analogue `Fact2,Fact3,Fact4,Fact5,Fact6`.

2. Montrer que le club est vide, c'est-à-dire

   ```
   Lemma vide : forall x:X, Fact1 -> Fact2 -> Fact3 -> Fact4 -> Fact5 -> Fact6 -> False.
   ```

Exercice 3 Le but de cet exercice est de formaliser en Coq un (petit) fragment de la théorie des ensembles, sous forme purement axiomatique. Pour cela, on introduit les paramètres suivants :

```
Parameter Ens : Type.                   (* L'univers des ensembles *)
Parameter empty : Ens.                  (* Ensemble vide *)
Parameter elt : Ens -> Ens -> Prop.     (* La relation d'appartenance *)
Axiom empty_ax : forall x:Ens, ~ (elt x empty).
```

1. Définissez en Coq la relation d'inclusion

   `subset : Ens -> Ens -> Prop`

2. Montrez que cette relation est réflexive et transitive.
3. Montrez que l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.

Exercice 4 *Min et Max, preuve par induction*
On se propose de représenter la fonction de maximum entre deux entiers naturels par la relation `max` que l'on définit par clôture de la manière suivante :

$$\frac{}{max\ 0\ x\ x} \qquad \frac{}{max\ x\ 0\ x} \qquad \frac{max\ x\ y\ z}{max\ (S\ x)\ (S\ y)\ (S\ z)}$$

1. Définir `max` comme une relation inductive.
2. Définir de la même manière la relation `min` représentant la fonction de minimum entre deux entiers naturels.
3. Montrer que le maximum de deux entiers égaux est égal à ce même entier :

   ```
   Lemma max_meme : forall x, max x x x.
   ```

4. Montrer que pour tout couple d'entiers, si l'un est le minimum de ce couple, alors l'autre en est le maximum (et inversement).

   ```
   Lemma min_max : forall x y, min x y x <-> max x y y.
   ```

5. Montrer que la relation `min` est incluse dans la relation de min définie de manière non inductive :

   ```
   Lemma min_inc : forall x y z, min x y z -> (z = x /\ x <= y) \/ (z = y /\ y <= x).
   ```

   Aide : on pourra démontrer les résultats intermédiaires suivants :

   ```
   Lemma min_inc1 : forall x y z, min x y z -> z = x \/ z = y.
   Lemma min_inc2 : forall x y, min x y x -> x <= y.
   Lemma min_inc3 : forall x y, min x y y -> y <= x.
   ```