Licence STS, semestre 4 — 2010–2011

Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 6 juin 2011

`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

Examen session 1 - 23 mai 2011

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso.

Exercice 1 *Cardinaux (4 points)* Soit E un ensemble de cardinal 3. Donner le cardinal des ensembles suivants (on utilisera les résultats du cours sans les redémontrer) :

1. $E \to E$ l'ensemble des applications de E dans E ;
2. l'ensemble des applications injectives de E dans E ;
3. $(E \times E) \to E$ l'ensemble des applications de $E \times E$ dans E ;
4. $E \to (E \to E)$ l'ensemble des applications de E dans l'ensemble $E \to E$ des applications de E dans E.
5. En déduire l'existence d'une bijection de $(E \times E) \to E$ dans $E \to (E \to E)$ (on ne cherchera pas à la construire explicitement).

Correction :

1. $|E \to E| = |E|^{|E|} = 3^3 = 27$.
2. *Les applications injectives de E dans E sont aussi bijectives (les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal). Le nombre d'applications injectives de E dans E est donc* $|E|! = 3! = 6$.
3. $|(E \times E) \to E| = |E|^{|E|\times|E|} = 3^9$.
4. $|E \to (E \to E)| = |E \to E|^{|E|} = 27^3 = 3^9$.
5. *Les ensembles $(E \times E) \to E$ et $E \to (E \to E)$ sont finis de même cardinal donc il existe une bijection entre ces deux ensembles.*

Exercice 2 *Algèbre de Boole (3 points)* On se place dans une algèbre de Boole (treillis distributif complémenté). On pourra utiliser les propriétés des algèbres de Boole vues en cours sans les redémontrer (loi de de Morgan, loi d'absorption, etc). Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall a\, b, \overline{\overline{\overline{a} \sqcup b} \sqcup a} \sqcup a = \top$
2. $\forall a\, b\, c\, d, (\overline{a} \sqcup b) \sqcap (\overline{c} \sqcup d) \leq \overline{(a \sqcap c)} \sqcup (b \sqcap d)$
3. En utilisant l'algèbre des booléens, montrer qu'il existe a, b, c, d tels que :

$$(\overline{a} \sqcup b) \sqcap (\overline{c} \sqcup d) \neq \overline{(a \sqcap c)} \sqcup (b \sqcap d)$$

Correction :

1. $\overline{\overline{\overline{a}\sqcup b}\sqcup a}\sqcup a = ((\overline{a}\sqcup b)\sqcap \overline{a})\sqcup a = \overline{a}\sqcup a = \top$
2. *Par distributivité on a :* $\overline{(a\sqcap c)}\sqcup(b\sqcap d) = (\overline{a}\sqcup\overline{c}\sqcup b)\sqcap\overline{a}\sqcup\overline{c}\sqcup d)$. *Or* $\overline{a}\sqcup b\leq\overline{a}\sqcup\overline{c}\sqcup b$ *et* $\overline{c}\sqcup d\leq\overline{a}\sqcup\overline{c}\sqcup d$ *donc* $\overline{a}\sqcup b\sqcap\overline{c}\sqcup d\leq(\overline{a}\sqcup\overline{c}\sqcup b)\sqcap(\overline{a}\sqcup\overline{c}\sqcup d) = \overline{(a\sqcap c)}\sqcup(b\sqcap d)$.
3. *Comme* $(\overline{a}\sqcup b)\sqcap(\overline{c}\sqcup d)\leq\overline{(a\sqcap c)}\sqcup(b\sqcap d)$, *on cherche* a,b,c,d *tels que* $(\overline{a}\sqcup b)\sqcap(\overline{c}\sqcup d)$ *soit faux et* $\overline{(a\sqcap c)}\sqcup(b\sqcap d)$ *soit vrai.*
   Pour que $(\overline{a}\sqcup b)\sqcap(\overline{c}\sqcup d)$ *soit faux, il suffit que* $\overline{a}\sqcup b$ *ou* $\overline{c}\sqcup d$ *soit faux, c'est-à-dire (1) a vrai et b faux ou (2) c vrai et d faux. D'autre part, pour que* $\overline{(a\sqcap c)}\sqcup(b\sqcap d)$ *soit vrai, avec (1) il faut que c soit faux, avec (2) il faut que a soit faux.*
   Donc $(\overline{a}\sqcup b)\sqcap(\overline{c}\sqcup d)\neq\overline{(a\sqcap c)}\sqcup(b\sqcap d)$ *si a est vrai et b et c sont faux, ou bien si c est vrai et a et d sont faux.*

Exercice 3 *Termes (7 points)* On modélise un nuancier de *couleurs*. Pour cela on introduit une structure de termes avec des constantes `bleu`, `rouge` et `jaune` pour représenter une dose de chacune des trois couleurs primaires et un opérateur binaire `mix` qui prend deux couleurs et les mélange pour obtenir une nouvelle couleur. Une couleur primaire donnée pourra apparaitre plusieurs fois dans la composition d'un mélange.

1. Donner un terme qui représente la couleur composée de trois doses de bleu et une dose de rouge.
2. Écrire de manière récursive une fonction `doses` qui étant donnée une couleur, calcule le nombre de doses de couleurs primaires qui apparaissent dans cette couleur.
3. Écrire de manière récursive une fonction `melanges` qui compte dans une couleur le nombre d'opérations de mélange.
4. Écrire de manière récursive une fonction `inverse` qui étant donnée une couleur, change les doses de `bleu` en `jaune`, les `jaune` en `rouge` et les `rouge` en `bleu`.
5. Énoncer le principe d'induction sur les couleurs.
6. Montrer que si on applique la fonction `inverse` à une couleur alors on préserve le nombre de doses.
7. Montrer que pour toute couleur, le nombre de doses est toujours égal au nombre de mélanges plus un.

Correction :

1. *Plusieurs termes sont possibles, par exemple* `mix(bleu,mix(bleu,mix(bleu,rouge)))`.
2. `doses(bleu)` $= 1$
   `doses(rouge)` $= 1$
   `doses(jaune)` $= 1$
   `doses(mix(`x,y`))` $=$ `doses(`x`)` $+$ `doses(`y`)`
3. `melange(bleu)` $= 0$
   `melange(rouge)` $= 0$
   `melange(jaune)` $= 0$
   `melange(mix(`x,y`))` $= 1 +$ `melange(`x`)` $+$ `melange(`y`)`
4. `inverse(bleu)` $=$ `jaune`
   `inverse(jaune)` $=$ `rouge`
   `inverse(rouge)` $=$ `bleu`
   `inverse(mix(`x,y`))` $=$ `mix(inverse(`x`),inverse(`y`))`

5. *Le principe d'induction est le suivant. Pour toute propriété P, si*
   (a) $P(\texttt{bleu})$,
   (b) $P(\texttt{rouge})$,
   (c) $P(\texttt{jaune})$,
   (d) *pour toutes couleurs x, y,* $P(x) \wedge P(y) \Rightarrow P(\texttt{mix}(x, y))$,

   alors $P(c)$ pour toute couleur c.
6. *On pose $P(c)$ la propriété* $\texttt{doses}(\texttt{inverse}(c)) = \texttt{doses}(c)$.
   (a) *Montrons $P(\texttt{bleu})$. On obtient $P(\texttt{rouge})$ et $P(\texttt{jaune})$ par le même raisonnement.* *On a* $\texttt{doses}(\texttt{inverse}(\texttt{bleu})) = \texttt{doses}(\texttt{jaune}) = 1$ *et* $\texttt{doses}(\texttt{bleu}) = 1$, *donc* $P(\texttt{bleu})$.
   (b) *Soit x, y deux couleurs. On suppose $P(x)$ et $P(y)$, montrons $P(\texttt{mix}(x, y))$.* *On a* $\texttt{doses}(\texttt{inverse}(\texttt{mix}(x, y))) = \texttt{doses}(\texttt{mix}(\texttt{inverse}(x), \texttt{inverse}(y))) = \texttt{doses}(\texttt{inverse}(x)) + \texttt{doses}(\texttt{inverse}(y))$. *En appliquant l'hypothèse d'induction, on obtient* $\texttt{doses}(\texttt{inverse}(\texttt{mix}(x, y))) = \texttt{doses}(x) + \texttt{doses}(y) = \texttt{doses}(\texttt{mix}(x, y))$.

   Donc $P(c)$ pour toute couleur c.
7. *On pose $P(c)$ la propriété* $\texttt{doses}(c) = \texttt{melange}(c) + 1$.
   (a) *Montrons $P(\texttt{bleu})$. On obtient $P(\texttt{rouge})$ et $P(\texttt{jaune})$ par le même raisonnement.* *On a* $\texttt{doses}(\texttt{bleu}) = 1$ *et* $\texttt{melange}(\texttt{bleu}) = 0$ *donc* $P(\texttt{bleu})$.
   (b) *Soit x, y deux couleurs. On suppose $P(x)$ et $P(y)$, montrons $P(\texttt{mix}(x, y))$.* *On a* $\texttt{doses}(\texttt{mix}(x, y)) = \texttt{doses}(x) + \texttt{doses}(y)$. *En appliquant l'hypothèse d'induction, on obtient* $\texttt{doses}(\texttt{mix}(x, y)) = \texttt{melange}(x) + 1 + \texttt{melange}(y) + 1 = \texttt{melange}(\texttt{mix}(x, y)) + 1$.

   Donc $P(c)$ pour toute couleur c.

Exercice 4 *Définition récursive de fonction, induction (6 points)* On souhaite définir une fonction c qui prend en entrée deux entiers naturels k et n et qui calcule un entier tel que pour tout k et n entiers on ait :

$$\mathsf{c}(0, n) = 1 \qquad \mathsf{c}(k+1, 0) = 0 \qquad \mathsf{c}(k+1, n+1) = \mathsf{c}(k, n) + \mathsf{c}(k+1, n)$$

1. Donner des règles d'inférence pour définir une relation $C(k, n, p)$ correspondant à cette définition récursive.
   En particulier la dernière équation $\mathsf{c}(k+1, n+1) = \mathsf{c}(k, n) + \mathsf{c}(k+1, n)$ sera traduite par le fait que si $C(k, n, p_1)$ et $C(k+1, n, p_2)$ alors $C(k+1, n+1, p_1 + p_2)$.
2. Construire des dérivations de $C(1, 3, 3)$ et $C(3, 2, 0)$.
3. Montrer par récurrence sur l'entier $n > 0$ que $C(1, n, n)$.
4. Montrer par récurrence sur l'entier n que l'on a $\forall k > n, C(k, n, 0)$.
5. Exprimer le principe d'induction associé à la relation C.
6. Montrer en utilisant le principe d'induction précédent que

$$C(k, n, p) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow p = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   On rappelle que $x!$ représente la fonction factorielle définie par $x! = x(x-1)\dots 1$ (en particulier $0! = 1$).

Correction :

1. *On définit la relation C par les règles d'inférence suivantes :*

$$\frac{}{C(0,n,1)} \qquad \frac{}{C(k+1,0,0)} \qquad \frac{C(k,n,p_1) \quad C(k+1,n,p_2)}{C(k+1,n+1,p_1+p_2)}$$

2. *Dérivation pour $C(1,3,3)$:*

$$\dfrac{\dfrac{}{C(0,2,1)} \quad \dfrac{\dfrac{}{C(0,1,1)} \quad \dfrac{\dfrac{}{C(0,0,1)} \quad \dfrac{}{C(1,0,0)}}{C(1,1,1)}}{C(1,2,2)}}{C(1,3,3)}$$

Dérivation pour $C(3,2,0)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C(1,0,0)} \quad \dfrac{}{C(2,0,0)}}{C(2,1,0)} \quad \dfrac{\dfrac{}{C(2,0,0)} \quad \dfrac{}{C(3,0,0)}}{C(3,1,0)}}{C(3,2,0)}$$

3. *Montrons par récurrence sur l'entier n, $n > 0$, on a $C(1,n,n)$.*
   - *Montrons $C(1,1,1)$. On a la dérivation suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{}{C(0,0,1)} \quad \dfrac{}{C(1,0,0)}}{C(1,1,1)}$$

   donc $C(1,1,1)$.
   On peut remaruqye que la propriété est déjà vérifiée pour $n = 0$.
   - *Cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. On suppose qu'on a $C(1,n,n)$. Montrons qu'on a $C(1,n+1,n+1)$. On a la dérivation suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{}{C(0,n,1)} \quad C(1,n,n)}{C(1,n+1,n+1)}$$

   Comme on a $C(1,n,n)$ par hypothèse de récurrence, on a bien $C(1,n+1,n+1)$.

   Donc $C(1,n,n)$ pour tout $n > 0$.

4. *Montrons par récurrence sur les entiers que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall k > n, C(k,n,0)$.*
   - *On a $C(k+1,0,0)$ directement par la deuxième règle d'inférence, donc pour tout $k > 0$, on a bien $C(k,0,0)$.*
   - *Cas général. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k > n$, $C(k,n,0)$. Montrons que pour tout $k > n+1$, on a $C(k,n+1,0)$. On a la dérivation suivante :*

$$\frac{C(k-1,n,0) \quad C(k,n,0)}{C(k,n+1,0)}$$

   Comme $k > n+1$, on a $k > n$ et $k-1 > n$, donc $C(k,n,0)$ et $C(k-1,n,0)$ sont vraies par hypothèse de récurrence. Donc on a bien $C(k,n+1,0)$ pour tout $k > n+1$.

   Donc pour tout n, $C(k,n,0)$ pour tout $k > n$.

5. *Le principe d'induction pour C est le suivant. Pour toute propriété P, si*
   (a) *pour tout n, $P(0,n,1)$,*
   (b) *pour tout k, $P(k+1,0,0)$,*
   (c) *pour tout k,n,p_1,p_2, $P(k,n,p_1) \wedge P(k+1,n,p_2) \Rightarrow P(k+1,n+1,p_1+p_2)$,*

   alors pour tout k,n,p, $C(k,n,p) \Rightarrow P(k,n,p)$.

6. *On pose $P(k,n,p)$ la propriété $k \leq n \Rightarrow p = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Montrons cette propriété par induction sur la relation C.*
   (a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons $P(0,n,1)$. On suppose $n \geq 0$. Pour $k=0$ on a $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ donc $P(0,n,1)$.*
   (b) *Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons $P(k+1,0,0)$. La prémisse $k+1 \leq 0$ est toujours fausse, donc la propriété est vérifiée.*
   (c) *Soient $k,n,p_1,p_2 \in \mathbb{N}$. On suppose $P(k,n,p_1)$ et $P(k+1,n,p_2)$. Montrons $P(k+1,n+1,p_1+p_2)$. On suppose $k \leq n$. Par hypothèse d'induction, on a $p_1 = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $p_2 = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$. On a :*

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k).n!}{(k+1).k!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+1).n! + (n-k).n!}{(k+1).k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

   Donc on a bien $P(k+1,n+1,p_1+p_2)$.

   D'où pour tout k,n,p, $C(k,n,p) \Rightarrow P(k,n,p)$.