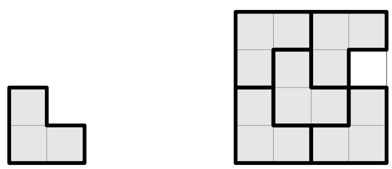
Examen session 1 - 30 mai 2012

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 5 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les questions sont largement indépendantes.

Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso.

Exercice 1 *Récurrence (3 points)*

Un triomino est une pièce formée de trois cases disposées en angle (voir figure 1(a)). On considère la propriété suivante : si on retire une case quelconque à un quadrillage de côté 2^n, $n \geq 1$, il est toujours possible de paver le reste du quadrillage avec des triominos. Montrer cette propriété par récurrence sur n.



(a) (b)

FIGURE 1 – (a) Un triomino. (b) Pavage par des triominos d'un quadrillage de côté 4 privé d'une case.

Correction :

Cas de base $n = 1$. *Un quadrillage de côté 2 auquel on retire une case est couvert par exactement un triomino.*

Récurrence *On suppose qu'un quadrillage de côté 2^n auquel on retire une case peut toujours être pavé par des triominos. Montrons que c'est également le cas d'un quadrillage de côté 2^{n+1} auquel on retire une case. Un quadrillage de côté 2^{n+1} est formé de quatre carrés de côté 2^n. La case retirée est dans exactement un de ces quatre carrés. On peut retirer une case à chacun des trois autres carrés en plaçant un triomino au centre du quadrillage de côté 2^{n+1}. On obtient alors un triomino et quatre carrés de côté 2^n auxquels une case a été retirée. Par hypothèse de récurrence, ces quatre carrés peuvent être pavés par des triominos donc le quadrillage initial aussi.*

Exercice 2 *Dénombrement (3 points)*

On se place dans un ensemble E fini. Pour X un sous-ensemble de E, on rappelle que $|X|$ représente le cardinal de X et $\bar{X}$ le complémentaire de X dans E (l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans X).

1. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Donner (sans les justifier) les formules qui permettent de calculer $|A \cup B|$ et $|A \cap \bar{B}|$ à l'aide de de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.
2. À l'université, les étudiants peuvent pratiquer, s'ils le souhaitent, des sports.
   - 300 étudiants font du tennis, 200 font du basket et 100 font à la fois du tennis et du basket ;
   - 150 garçons font du tennis, 90 font du basket et 40 font à la fois du tennis et du basket.

   On introduit les notations suivantes :
   - T l'ensemble des étudiants qui font du tennis ;
   - B l'ensemble des étudiants qui font du basket ;
   - G l'ensemble des garçons ;
   - A l'ensemble des filles qui font au moins un des sports tennis ou basket.

   (a) Exprimer A en fonction de T, B et G en utilisant les opérations d'union, d'intersection et de complément.

   (b) En déduire le nombre de filles qui font au moins un des sports tennis ou basket.

Correction :

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ *et* $|A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B|$

2. *(a) On a* $A = (T \cup B) \cap \bar{G}$

(b) On en déduit : $|A| = |T \cup B| - |(T \cup B) \cap G|$.
Comme $(T \cup B) \cap G = (T \cap G) \cup (B \cap G)$, *on en déduit*

$$|A| = |T| + |B| - |T \cap B| - (|T \cap G| + |B \cap G| - |T \cap B \cap G|$$

et donc $|A| = 300 + 200 - 100 - (150 + 90 - 40) = 200$

Exercice 3 *Relation bien fondée (4 points)*

On s'intéresse à des relations binaires R sur un ensemble A. On dit qu'une relation est bien fondée s'il n'existe pas de suite infinie $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall i, R(a_{i+1}, a_i)$.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On se donne une fonction $f : A \to \mathbb{N}$. On définit une relation R sur A par

$$R(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) < f(y)$$

   avec $<$ l'ordre strict usuel sur les entiers. Montrer que la relation R est bien fondée.
2. On prend $A = \{0, 1\}$, on définit deux fonctions f et g par $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$ et $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - x$ et la relation R par $R(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) < f(y) \vee g(x) < g(y)$. Montrer que l'on a $R(0, 1)$ et $R(1, 0)$. En déduire que R n'est pas bien fondée.
3. On se donne deux fonctions f et g dans $A \to \mathbb{N}$. On suppose que pour tout x et y on a $f(x) < f(y) \Rightarrow g(x) \leq g(y)$ et $g(x) < g(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. On définit la relation R par $R(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) < f(y) \vee g(x) < g(y)$. On va montrer que R est une relation bien fondée.

   (a) Montrer que $R(x, y) \Rightarrow f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.

   (b) En déduire que R est bien fondée.

Correction :

1. *On suppose que R n'est pas bien fondée et donc qu'il existe une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, R(a_{i+1}, a_i)$. On a donc pour tout $\forall i \in \mathbb{N}, f(a_{i+1}) < f(a_i)$. On aurait alors une suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ ce qui n'est pas possible.*
2. *On a $f(0) = 0 < 1 = f(1)$ donc $R(0,1)$ et $g(1) = 0 < 1 = g(0)$ donc on a aussi $R(1,0)$. Si on regarde la suite $a_{2i} = 0$ et $a_{2i+1} = 1$ alors on a $R(a_{i+1}, a_i)$ pour tout i et donc cette relation n'est pas bien fondée.*
3. (a) *Si $R(x,y)$ alors*
      - *soit $f(x) < f(y)$ mais alors on a aussi $g(x) \leq g(y)$ et donc $f(x)+g(x) < f(y)+g(y)$*
      - *soit $g(x) < g(y)$ mais alors on a aussi $f(x) \leq f(y)$ et donc on a aussi $f(x)+g(x) < f(y)+g(y)$*

   (b) *Soit $h : A \to \mathbb{N}$ telle que $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x)$. On a $R(x,y) \Rightarrow h(x) < h(y)$. S'il existait une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, R(a_{i+1}, a_i)$, on aurait $\forall i \in \mathbb{N}, h(a_{i+1}) < h(a_i)$ ce qui n'est pas possible.*

Exercice 4 *Ensembles d'entiers, mots binaires (10 points)*

Dans cet exercice, on s'intéresse à des ensembles d'entiers compris entre 1 et n. On note I_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et n (par convention I_0 est l'ensemble vide) et $P_n = \wp(I_n)$ l'ensemble des sous-ensembles de I_n.

4.1 Ensembles (2 points)

1. On suppose $n = 3$, donner en extension les éléments de P_3. Quel est le cardinal de cet ensemble ?
2. Quel est le cardinal de I_0 ? de P_0 ? de P_n en général ?

Correction :

- *On a $I_3 = \{1,2,3\}$ et $P_3 = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{2;3\}; \{1;3\}; \{1;2\}; \{1;2;3\}$, $|P_3| = 8$.*
- *On a $|I_0| = 0$,$|P_0| = 1$ et en général $|P_n| = 2^n$.*

4.2 Représentation binaire (8 points) On représente un ensemble d'entiers, élément de P_n, par un mot de longueur n ne contenant que des 0 ou des 1, appelé un *mot binaire*. On note M_n l'ensemble des mots binaires de longueur n.

- Le mot vide ϵ représente l'ensemble vide, qui est le seul élément de P_0.
- Le mot $a_n a_{n-1} \ldots a_1$ représente l'ensemble des entiers i pour lesquels $a_i = 1$.

Si on prend $n = 3$, alors 000 représente l'ensemble vide, 100 représente le singleton $\{3\}$, 001 représente le singleton $\{1\}$ et 101 représente l'ensemble $\{1;3\}$.

Les constructions sur les mots binaires de longueur n peuvent se faire de manière récursive. En effet si $n > 0$, le mot $m = a_n a_{n-1} \ldots a_1$ de M_n se décompose en a_n et en un mot $m' = a_{n-1} \ldots a_1 \in M_{n-1}$. Le mot m' représente un ensemble X d'entiers entre 1 et $n-1$, le mot m représente le même ensemble vu comme un élément de P_n si $a_n = 0$ et l'ensemble $\{n\} \cup X$ si $a_n = 1$.

1. Pour $n = 6$, dire à quel ensemble correspond le mot 101011 et donner la représentation par un mot binaire de l'ensemble $\{1;4\}$.

2. Définir de manière récursive une fonction $\mathtt{val}_n$ de $M_n \to P_n$ qui à un mot binaire associe l'ensemble qu'il représente.
   (Indication : On pourra définir $\mathtt{val}_0(\epsilon)$, et $\mathtt{val}_{n+1}(0m)$ ainsi que $\mathtt{val}_{n+1}(1m)$ en fonction de n et de $\mathtt{val}_n(m)$)
3. Définir de manière récursive sur n une fonction $\mathtt{inter}$ qui à deux mots binaires m_1 et m_2 de même longueur associe un mot binaire qui représente l'intersection des ensembles représentés par m_1 et m_2. C'est-à-dire que l'on doit avoir $\mathtt{val}_n(\mathtt{inter}(m_1, m_2)) = \mathtt{val}_n(m_1) \cap \mathtt{val}_n(m_2)$.
4. On note 0_n le mot de longueur n formé uniquement de 0, le mot 0_0 est vide et donc correspond à ϵ.
   Montrer par récurrence sur n que pour tout $m \in M_n$ on a $\mathtt{inter}(m, 0_n) = 0_n$.
5. On définit par des règles d'inférence ci-dessous une relation $\mathtt{incl}(m_1, m_2)$ sur les mots de même longueur qui représente le fait que l'ensemble représenté par m_1 est inclus dans l'ensemble représenté par m_2 :

$$\frac{}{\mathtt{incl}(\epsilon, \epsilon)}(1) \qquad \frac{\mathtt{incl}(m_1, m_2)}{\mathtt{incl}(am_1, am_2)}(2) \qquad \frac{\mathtt{incl}(m_1, m_2)}{\mathtt{incl}(0m_1, 1m_2)}(3)$$

   (a) Construire une preuve de $\mathtt{incl}(0011, 1011)$ en indiquant à chaque étape quelle règle d'inférence est utilisée.
   (b) Montrer par récurrence sur le mot m que pour tout $m \in M_n$ on a $\mathtt{incl}(m, m)$.
   (c) Énoncer le principe d'induction associé à la relation $\mathtt{incl}$.
   (d) En utilisant ce principe, montrer que pour tout m_1 et m_2 dans M_n, on a $\mathtt{incl}(m_1, m_2) \Rightarrow \mathtt{inter}(m_1, m_2) = m_1$.

Correction :

1. Le mot 101011 correspond à l'ensemble $\{6; 4; 2; 1\}$ et l'ensemble $\{1; 4\}$ est représenté par le mot 001001.

2. $\boldsymbol{val}_0(\epsilon) = \emptyset$, $\boldsymbol{val}_{n+1}(0m) = \boldsymbol{val}_n(m)$ et $\boldsymbol{val}_{n+1}(1m) = \{n+1\} \cup \boldsymbol{val}_n(m)$

*3. $\boldsymbol{inter}(\epsilon, \epsilon) = \epsilon$, $\boldsymbol{inter}(1m_1, 1m_2) = 1\,\boldsymbol{inter}(m_1, m_2)$
et $\boldsymbol{inter}(am_1, bm_2) = 0\,\boldsymbol{inter}(m_1, m_2)$ si $a = 0$ ou $b = 0$.*

4. On a $0_0 = \epsilon$ et $0_{n+1} = 00_n$, on fait une récurrence sur la structure de $m \in P_n$ sur la propriété $P(m) = \boldsymbol{inter}_n(m, 0_n) = 0_n$.
- *si $m = \epsilon$ alors $n = 0$, et $0_n = \epsilon$, la propriété est vraie.*
- *si $m = am'$, on suppose la propriété vraie pour m' et donc $\boldsymbol{inter}_n(m', 0_n) = 0_n$, montrons $\boldsymbol{inter}_{n+1}(am, 0_{n+1}) = 0_{n+1}$, comme $0_{n+1} = 00_n$, on est dans le deuxième cas et on a $\boldsymbol{inter}_{n+1}(am, 0_{n+1}) = 0\,\boldsymbol{inter}_n(m, 0_n) = 00_n = 0_{n+1}$.*

5. (a)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\boldsymbol{incl}(\epsilon,\epsilon)}\,(1)}{\boldsymbol{incl}(1,1)}\,(2)}{\boldsymbol{incl}(11,11)}\,(2)}{\boldsymbol{incl}(011,011)}\,(2)}{\boldsymbol{incl}(0011,1011)}\,(3)$$

   (b) On montre par resurrence sur le mot m que pour tout $m \in M_n$ on a $\boldsymbol{incl}(m, m)$.

- *Le cas de base $m = \epsilon$ est vrai (regle 1)*
- *Pour le cas récursif, on suppose la propriété vraie pour m, on a donc $\boldsymbol{incl}(m, m)$. On doit la montrer pour le mot am. C'est exactement la règle 2.*

(c) *Soit $R(m_1, m_2)$ une relation binaire sur les mots.*
Si :

i. $R(\epsilon, \epsilon)$

ii. $\forall m_1\, m_2, \forall a \in \{0; 1\}, R(m_1, m_2) \Rightarrow R(am_1, am_2)$

iii. $\forall m_1\, m_2, R(m_1, m_2) \Rightarrow R(0m_1, 1m_2)$

Alors : $\forall m_1\, m_2$, $\boldsymbol{incl}(m_1, m_2) \Rightarrow R(m_1, m_2)$.

(d) *On pose* $R(m_1, m_2) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = m_1$. *Il suffit de montrer*

i. $R(\epsilon, \epsilon)$ *c'est-à-dire* $\boldsymbol{inter}(\epsilon, \epsilon) = \epsilon$

ii. *On suppose $R(m_1, m_2)$ vrai et donc $\boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = m_1$. Soit $a \in \{0; 1\}$, il faut montrer $R(am_1, am_2)$ c'est-à-dire $\boldsymbol{inter}(am_1, am_2) = am_1$. Si $a = 1$ alors $\boldsymbol{inter}(am_1, am_2) = 1\boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = 1m_1$ sinon $\boldsymbol{inter}(am_1, am_2) = 0\boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = 0m_1$. Dans les deux cas , la propriété est établie.*

iii. *On suppose $R(m_1, m_2)$ vrai et donc $\boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = m_1$.*
Il faut montrer $R(0m_1, 1m_2)$ c'est-à-dire $\boldsymbol{inter}(0m_1, 1m_2) = 0m_1$. Or $\boldsymbol{inter}(0m_1, 1m_2) = 0\boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = 0m_1$

On a donc bien $\forall m_1\, m_2$, $\boldsymbol{incl}(m_1, m_2) \Rightarrow \boldsymbol{inter}(m_1, m_2) = m_1$