Examen session 1 - 22 mai 2013

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 3 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les questions sont largement indépendantes. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso.

Les copies doivent être **cachetées**.

Exercice 1 *Dénombrement (2 points)*

Pour saisir son mot de passe, la banque postale affiche les chiffres de 0 à 9 sur un damier de 4 cases par 4 cases (certaines cases restent vides).

Combien y-a-t-il de configurations différentes ? (on pourra utiliser la fonction factorielle pour exprimer le résultat).

Exercice 2 *Définitions sur les mots (10 points)*

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites finies d'entiers (c'est-à-dire des mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui seront notés par simple juxtaposition $n_1\,n_2\ldots\,n_k$).

1. Définir par des équations récursives les deux applications suivantes :

   (a) l'application `plus1` de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ qui ajoute 1 à chaque entier du mot.
   Par exemple : $\texttt{plus1}(1\,2\,3\,10) = 2\,3\,4\,11$.

   (b) l'application `seg` de $\mathbb{N} \to \mathcal{S}$ qui à un entier n associe un mot formé des n entiers de 0 à $n-1$. Par exemple $\texttt{seg}(0)$ est le mot vide et $\texttt{seg}(3) = 0\,1\,2$.

   Correction :
   (a)

$$\texttt{plus1}(\epsilon) = \epsilon \qquad \texttt{plus1}(i\,l) = (i{+}1)\,\texttt{plus1}(l)$$

   (b)

$$\texttt{seg}(0) = \epsilon \qquad \texttt{seg}(n+1) = \texttt{seg}(n)\,n$$

   Autre équation possible $\texttt{seg}(n+1) = 0\,\texttt{plus1}(\texttt{seg}(n))$.

2. On définit par les règles d'inférence suivantes une relation $F \subseteq \mathbb{N}\times\mathcal{S}$ qui associe un entier et un mot de $\mathcal{S}$.

$$a.\ \frac{}{F(1,0)} \qquad b.\ \frac{F(n,l)}{F(2{\times}n, \texttt{plus1}(l))} \qquad c.\ \frac{F(n+1,k\,l)}{F(n,\texttt{seg}(k)\,l)}$$

   Dans l'expression $F(n+1,k\,l)$ de la prémisse de la règle c, $k\,l$ représente une suite non vide qui commence par un entier k, par exemple $3\,5\,7$; on a alors $k=3$ et $l=5\,7$ et on aura dans la conclusion $\texttt{seg}(k) = \texttt{seg}(3) = 0\,1\,2$ et $\texttt{seg}(k)l = 0\,1\,2\,5\,7$.

(a) Indiquer dans la dérivation suivante quelle règle est utilisée à chaque étape :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{F(1,0)}}{F(2,1)}}{F(4,2)}}{F(3,0\,1)}}{F(6,1\,2)}}{F(5,0\,2)}$$

Correction :

$$\begin{array}{rc} a- & \overline{F(1,0)} \\ b- & \overline{F(2,1)} \\ b- & \overline{F(4,2)} \\ c- & \overline{F(3,0\,1)} \\ b- & \overline{F(6,1\,2)} \\ c- & \overline{F(5,0\,2)} \end{array}$$

(b) Trouver un mot l tel que $F(7,l)$ est dérivable et construire la dérivation.
Correction :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F(1,0)}{F(2,1)}}{F(4,2)}}{F(8,3)}}{F(7,0\,1\,2)}$$

(c) Donner le principe d'induction associé à la relation F.
Correction :
Soit un prédicat $P(n,l)$ avec n un entier et l un mot d'entier. Si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

i. $P(1,0)$

ii. $\forall n\,l, P(n,l) \Rightarrow P(2\times n, \texttt{plus1}(l))$

iii. $\forall n\,k\,l, P(n+1,k\,l) \Rightarrow P(n, \texttt{seg}(k)l)$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathcal{S}, F(n,l) \Rightarrow P(n,l)$

(d) Justifier que si $F(n,l)$ est vérifié alors l est une suite strictement croissante d'entiers.
Correction : *On vérifie que la propriété que l est strictement croissante est préservée par chaque règle d'inférence, en particulier la suite $\texttt{seg}(k)$ est une suite strictement croissante qui ne contient que des entiers strictement compris entre 0 et k.*

(e) Montrer en utilisant le principe d'induction précédent que pour tout entier n et mot l, si $F(n,l)$ alors $n = \Sigma_{i\in l}2^i$. La notation $\Sigma_{i\in l}2^i$ représente la somme des puissances de 2 pour tous les indices i dans la suite d'entiers l. On a en particulier $\Sigma_{i\in l}2^i = 0$ si l est le mot vide ϵ et $\Sigma_{i\in k\,l}2^i = 2^k + \Sigma_{i\in l}2^i$.

Correction : *On prend comme propriété* $P(n,l) \stackrel{\text{def}}{=} n = \Sigma_{i\in l}2^i$.
Il suffit de montrer les 3 propriétés du principe d'induction précédent.

i. $P(1,0)$, *c'est-à-dire* $1 = \Sigma_{i\in 0}2^i = 2^0$ *ce qui est trivial.*

ii. $\forall n\, l, P(n,l) \Rightarrow P(2\times n, \texttt{plus1}(l))$
On suppose donc que $n = \Sigma_{i\in l}2^i$ *et il faut montrer* $2\times n = \Sigma_{i\in \texttt{plus1}(l)}2^i$.
Or on a $2\times n = 2\times \Sigma_{i\in l}2^i = \Sigma_{i\in l}2^{i+1}$ *d'où le résultat.*

iii. $\forall n\, k\, l, P(n+1, k\, l) \Rightarrow P(n, \texttt{seg}(k-1)\, l)$
On suppose que l'on a $n+1 = \Sigma_{i\in i\, l}2^i$ *et il faut montrer* $n = \Sigma_{i\in \texttt{seg}(k) l}2^i$.
Or $n+1 = \Sigma_{i\in k\, l}2^i = 2^k + \Sigma_{i\in l}2^i$. *On remarque que* $2^k - 1 = 1 + \cdots 2^{k-1} = \Sigma_{i\in\texttt{seg}(k)}2^i$ *d'où le résultat.*

Exercice 3 *Ordre sur les multi-ensembles (10 points)*

Soit A un ensemble, un multi-ensemble est une structure qui contient des éléments de A possiblement en plusieurs exemplaires. Pour représenter un multi-ensemble m, on compte combien de fois chaque élément de A apparaît dans m. Un multi-ensemble peut se modéliser par une application m de A dans $\mathbb{N}$: pour chaque $x \in A$, $m(x)$ représente le nombre de fois où x apparait dans m.

On introduit la notation $\mathcal{M}(A)$ pour l'ensemble des multi-ensembles de A. C'est-à-dire $\mathcal{M}(A) \stackrel{\text{def}}{=} A \to \mathbb{N}$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{N}$.

- L'ensemble vide est représenté par la fonction $m_\emptyset$ qui vaut 0 partout.
- Soit m un multi-ensemble et x un élément de A, on dit que x appartient à m et on note $x \in m$ lorsque $m(x) > 0$.
- Si m_1 et m_2 sont deux multi-ensembles, on dit que m_1 est inclus dans m_2 et on note $m_1 \subseteq m_2$ lorsque $\forall x \in A, m_1(x) \leq m_2(x)$.
- L'union $m_1 \cup m_2$ de deux multi-ensembles m_1 et m_2 est définie comme l'application telle que $(m_1 \cup m_2)(x) = m_1(x) + m_2(x)$.
- La différence $m_1 \backslash m_2$ de deux multi-ensembles m_1 et m_2 est définie comme l'application telle que $(m_1 \backslash m_2)(x) = \texttt{max}(m_1(x) - m_2(x), 0)$.

Un multi-ensemble est fini s'il n'a qu'un nombre fini d'éléments. On peut représenter un multi-ensemble fini comme une liste. Par exemple avec $A = \{a, b, c\}$:

- le multi-ensemble p_1 qui contient 2 fois l'objet a, 3 fois l'objet b correspond à une fonction $\{(a \mapsto 2), (b \mapsto 3), (c \mapsto 0)\}$ et se représente par une liste $[a; a; b; b; b]$;
- le multi-ensemble p_2 qui contient 1 fois l'objet a, 1 fois l'objet b et 2 fois l'objet c, correspond à une fonction $\{(a \mapsto 1), (b \mapsto 1), (c \mapsto 2)\}$ et à la liste $[a; b; c; c]$;
- l'union $p_1 \cup p_2$ correspond à la fonction $\{(a \mapsto 3), (b \mapsto 4), (c \mapsto 2)\}$ et à la liste $[a; a; a; b; b; b; b; c; c]$;
- la différence $p_1 \backslash p_2$ correspond à la fonction $\{(a \mapsto 1), (b \mapsto 2), (c \mapsto 0)\}$ et à la liste $[a; b; b]$.

L'ordre des éléments dans la liste n'a pas d'importance, par exemple $[b; a; b; a; b] = [a; a; b; b; b]$.

1. Dans cette partie on considère l'ordre d'inclusion sur les multi-ensembles.
   (a) Soient les multi-ensembles p_1 et p_2 donnés précédemment, décrire l'ensemble des minorants de $\{p_1, p_2\}$ ainsi que l'ensemble des majorants. Ces deux éléments ont-ils une borne supérieure ? une borne inférieure ? si oui la donner.

   Correction :
   - *Les minorants sont tous les multi-ensembles qui sont inclus à la fois dans* p_1 *et* p_2 *donc de la forme* $\{(a \mapsto x), (b \mapsto y), (c \mapsto z)\}$ *avec* $x \leq 1, y \leq 1, z = 0$ *donc on a 4 multi-ensembles possibles* $[]$, $[a]$, $[b]$, $[a; b]$

- *Les majorants sont tous les multi-ensembles qui contiennent à la fois dans* p_1 *et* p_2 *donc de la forme* $\{(a \mapsto x), (b \mapsto y), (c \mapsto z)\}$ *avec* $2 \leq x, 3 \leq y, 2 \leq z$ *donc on a un ensemble infini de multi-ensembles possibles.*
- *Il y a une borne supérieure (le plus petit des majorants) qui est le multi-ensemble* $\{(a \mapsto 2), (b \mapsto 3), (c \mapsto 2)\}$ *soit* $[a; a; b; b; b; c; c]$ *et une borne inférieure (le plus grand des minorants) qui est* $\{(a \mapsto 1), (b \mapsto 1), (c \mapsto 0)\}$ *soit* $[a; b]$

(b) Montrer que $m_\emptyset$ est l'élément minimal de $\mathcal{M}(A)$.

Correction : *Il suffit de montrer que pour tout* $m \in \mathcal{M}(A)$ *on a* $m_\emptyset \subseteq m$*, soit* $\forall x, m_\emptyset(x) \leq m(x)$ *ce qui est vrai car* $m_\emptyset(x) = 0$.

(c) Soit m_1 et m_2 deux multi-ensembles quelconques, construire le multi-ensemble $m_1 \sqcup m_2$ qui correspond à la borne supérieure de m_1 et m_2 ainsi que le multi-ensemble $m_1 \sqcap m_2$ qui correspond à la borne inférieure de m_1 et m_2. Il suffira pour chaque élément $x \in A$ de définir $(m_1 \sqcup m_2)(x)$ et $(m_1 \sqcap m_2)(x)$ en fonction de $m_1(x)$ et $m_2(x)$.

Correction :
- $m_1 \sqcup m_2(x) = \textbf{max}(m_1(x), m_2(x))$
- $m_1 \sqcap m_2(x) = \textbf{min}(m_1(x), m_2(x))$

(d) Si A est fini et non vide que peut-on dire du cardinal de l'ensemble $\mathcal{M}(A)$? est-il fini ? dénombrable ?

Correction : $\mathcal{M}(A)$ *est un ensemble dénombrable. En effet* A *est fini non vide de cardinal* $k \neq 0$ *alors* $A \to \mathbb{N}$ *est isomorphe à* $\mathbb{N}^k$ *qui est dénombrable.*

(e) L'ordre d'inclusion sur les multi-ensembles est-il total ? justifier la réponse.

Correction : *L'ordre n'est pas total : si on prend les deux multi-ensembles* p_1 *et* p_2*, aucun n'est inclus dans l'autre.*

2. On suppose maintenant que l'ensemble A est muni d'un ordre strict noté $x < y$ et on introduit un ordre strict sur les multi-ensembles $\mathcal{M}(A)$. On dira que $m_1 \ll m_2$ si on peut décomposer m_1 et m_2 en deux parties : $m_1 = m \cup l_1$ et $m_2 = m \cup l_2$ et que tous les éléments de l_1 sont dominés par un élément de l_2, c'est-à-dire que $\forall x \in l_1, \exists y \in l_2, x < y$. On demande de plus que l_2 soit non vide.

(a) En reprenant les notations du préambule et en supposant $a < b < c$, montrer que $p_1 \ll p_2$.

Correction : *On écrit* $p_1 = [a; b] \cup [a; b; b]$ *et* $p_2 = [a; b] \cup [c; c]$ *on prend* $m = [a; b]$, $l_1 = [a; b; b]$ *et* $l_2 = [c; c]$*. Tous les éléments de* l_1 *sont dominés par* c *donc* $p_1 \ll p_2$.

(b) Soient deux multi-ensembles m_1 et m_2, montrer que si $m_1 \subseteq m_2$ et $m_1 \neq m_2$ alors $m_1 \ll m_2$.

Correction : *Si* $m_1 \subseteq m_2$ *alors on peut prendre* $m = m_1$, $l_1 = m_\emptyset$ *et* $l_2 = m_2 \backslash m_1$*. On a que* l_2 *est non vide (sinon* $m_1 = m_2$*) et comme* l_1 *est vide, tous les éléments de* l_1 *sont dominés par un élément de* l_2*. Donc* $m_1 \ll m_2$.

(c) On suppose que l'ordre strict sur A est total c'est-à-dire que $\forall x\, y \in A, x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x$. Nous allons montrer que l'ordre multi-ensemble est total, c'est-à-dire que si m_1 et m_2 deux multi-ensembles tels que $m_1 \neq m_2$ alors $m_1 \ll m_2 \vee m_2 \ll m_1$. Soit $m \stackrel{\text{def}}{=} m_1 \sqcap m_2$, $l_1 \stackrel{\text{def}}{=} m_1 \backslash m$ et $l_2 \stackrel{\text{def}}{=} m_2 \backslash m$:

i. Montrer que si $x \in l_1$ alors $x \notin l_2$ et que l_1 et l_2 ne peuvent pas être vides en même temps.

ii. Soit P la propriété $\forall x \in l_1, \exists y \in l_2, x < y$. Par définition de l'ordre strict, si P est vrai on en déduit que $m_1 \ll m_2$. En transformant la formule logique $\neg P$, montrer que si P est faux alors $m_2 \ll m_1$.

Correction :

i. Si l_1 et l_2 étaient vide en même temps alors on aurait $m_1 = m_2$. On a $(m_1 \sqcap m_2)(x) = \mathbf{min}(m_1(x), m_2(x))$ et $l_i(x) = m_i(x) - \mathbf{min}(m_1(x), m_2(x))$ donc si $m_1(x) \leq m_2(x)$ alors $l_1(x) = 0$ et dans le cas contraire on a $l_2(x) = 0$. Les multi-ensembles l_1 et l_2 n'ont pas d'éléments communs.

ii. Si P est faux alors $\exists x \in l_1, \forall y \in l_2, \neg x < y$. Soit x vérifiant cette propriété et $y \in l_2$ on a vu que $x \neq y$ donc $\neg x < y \Rightarrow y < x$ et donc les éléments de l_2 sont dominés par un élément de l_1 et donc $m_2 \ll m_1$.