Licence STS, semestre 4 — 2010–2011
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 8 mai 2012
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

Examen session 2 - 23 juin 2011

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 2 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso.

Exercice 1 *Logique* (2 points)
Les formules suivantes sont-elles prouvables ?

1. $((A \vee B) \Rightarrow C) \Rightarrow \neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
2. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg C \Rightarrow \neg A$

Si oui, on donnera une dérivation en utilisant les règles élémentaires de la logique, sinon on proposera des valeurs de vérité A, B et C qui rendent la formule fausse. On rappelle que le symbole d'implication associe à droite et donc que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ correspond à $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 2 *Algèbre de Boole* (2 points)
Dans une algèbre de Boole, on s'intéresse à la propriété suivante : $a \sqcap b = a \vee a \sqcup b = a$

1. Montrer que cette formule est vérifiée pour tout a et b dans l'algèbre des booléens.
2. Donner un exemple d'une algèbre de Boole et de valeurs a et b pour lesquelles cette formule n'est pas vérifiée.
3. (Bonus) à quelle propriété sur l'ordre associé à l'algèbre de Boole correspond la propriété donnée ?

Exercice 3 *Mots* (6 points)
Soit A l'ensemble formé des 3 caractères `a`, `b` et `c`.

1. Quel est le cardinal des ensemble de mots formés sur l'alphabet A suivants :
   – Ensemble des mots de longueur 0.
   – Ensemble des mots de longueur 1.
   – Ensemble des mots de longueur 3.
2. L'ensemble des mots sur l'alphabet A est-il dénombrable ? si oui indiquer (sans le formaliser) comment construire une énumération des mots de A.
3. On considère le langage L défini par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{}{\epsilon \in L} \qquad \frac{m_1 \in L \quad m_2 \in L}{\mathtt{a}m_1\mathtt{c}m_2\mathtt{b} \in L} \qquad \frac{m_1 \in L \quad m_2 \in L}{\mathtt{b}m_1\mathtt{c}m_2\mathtt{a} \in L}$$

   (a) Dire si les mots suivants appartiennent au langage L :

   $$\mathtt{acb}, \mathtt{ab}, \mathtt{bacbca}, \mathtt{cab}.$$

   Si oui donner la preuve sous la forme d'une dérivation dont la conclusion est $m \in L$, sinon on pourra juste donner un argument informel.

(b) Donner le principe d'induction associé à la définition du langage L qui permet de montrer $\forall m \in L, P(m)$.

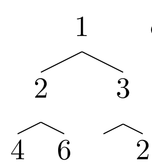
(c) Montrer que tous les mots du langage L ont le même nombre de a, de b et de c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 *Ordre* (5 points)
On définit une relation sur les fonctions de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f < g \stackrel{\text{def}}{=} \exists n \in \mathbb{N}, f(n) < g(n) \wedge (\forall k \leq n, f(k) = g(k))$$

1. Montrer que cette relation est un ordre strict (relation anti-réflexive et transitive).
2. Est-ce un ordre total ?
3. Pour tout n, on considère la fonction f_n telle que $f_n(k) = 0$ si $k < n$ et $f_n(k) = 1$ si $n \leq k$. Montrer que $f_{n+1} < f_n$ pour tout n.
4. L'ordre proposé est-il bien fondé ?

Exercice 5 *Arbres binaires* (5 points)
On rappelle que la signature des arbres binaires contenant des entiers est formée d'une constante `leaf` et d'un symbole ternaire `node` d'arité `tree` $\times \mathbb{N} \times$ `tree` $\to$ `tree`.

1. Donner les équations pour définir une fonction récursive `infix` qui étant donné un arbre binaire t, renvoie le mot composé des entiers contenus dans l'arbre parcouru de manière infixe : on parcourt d'abord le sous-arbre gauche, puis on ajoute l'entier du nœud puis le mot correspondant au parcours du sous-arbre droit.
   Par exemple, l'arbre  donnera le mot : 426132.
2. Donner des règles d'inférence pour définir la relation $\texttt{in}(n, t)$ qui représente le fait que l'entier n apparaît dans un nœud de l'arbre t.
3. On s'intéresse aux *arbres binaires de recherche* qui vérifient que dans chaque sous-arbre de la forme $\texttt{node}(l, n, r)$, tous les entiers stockés dans le sous-arbre l sont inférieurs ou égaux à n qui est lui-même inférieur ou égal à tous les entiers stockés dans le sous-arbre r.

   (a) On note $\texttt{elt}(n)$ l'arbre $\texttt{node}(\texttt{leaf}, n, \texttt{leaf})$ qui contient un seul entier n. Est-ce un arbre binaire de recherche ? Les termes suivants sont-ils des arbres binaires de recherche :

   $$\texttt{node}(\texttt{leaf}, 1, \texttt{elt}(2)) \quad \texttt{node}(\texttt{leaf}, 2, \texttt{elt}(1))$$

   (b) Ecrire un terme correspondant à un arbre binaire de recherche, qui contient les valeurs 1, 2, 3 et 4. Donner la valeur de la fonction `infix` pour cet arbre.

   (c) (Bonus) Donner des règles d'inférence pour définir la relation $\texttt{abr}(t)$ qui représente le fait que l'arbre t est un arbre binaire de recherche.

   (d) (Bonus) Justifier que si l'arbre t est un arbre binaire de recherche alors le mot $\texttt{infix}(t)$ est trié, c'est-à-dire que les entiers apparaissent en ordre croissant.