Examen session 2 - 28 juin 2012

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 3 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les questions sont largement indépendantes.

Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso.

Exercice 1 *Cardinaux (3 points)*

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{0,1\}$.

1. Quel est le cardinal de $\mathbb{B}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}$? de l'ensemble des parties de $\mathbb{B}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}$?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications de $\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$?
3. Donner en extension toutes les applications bijectives de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ (chaque application f pourra être représentée par la relation correspondante c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, f(x))$).

Exercice 2 *Logique (3 points)*

Les formules suivantes sont-elles prouvables ?

1. $(\neg A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C$
2. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg A \Rightarrow B \Rightarrow \neg C$

Si oui, on donnera une dérivation en utilisant les règles élémentaires de la logique, sinon on proposera des valeurs de vérité A, B et C qui rendent la formule fausse. On rappelle que le symbole d'implication associe à droite et donc que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ correspond à $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 3 *Fonctions (3 points)*

Soit A, B, C trois ensembles, f une fonction de A dans B et g une fonction de B dans C.

1. Donner la définition de f est injective.
2. Montrer que si f et g sont injectives alors il en est de même de la fonction h de A dans C définie par $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 *Relation inductive (5 points)*

Soit un ensemble d'entiers $p \subseteq \mathbb{N}$, on définit de manière inductive un prédicat E_p par les règles d'inférences suivantes :

$$\frac{n \in p}{E_p(n)} \qquad \frac{E_p(n+1)}{E_p(n)}$$

1. Soit p l'ensemble des entiers qui sont multiples de 6 (i.e. 0, 6, 12, 18 ...). Construire une dérivation de $E_p(10)$.
2. L'ensemble p est maintenant quelconque, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, (E_p(n) \Rightarrow E_p(0))$.
3. Énoncer le principe d'induction associé à la définition de E_p.
4. Soit un ensemble q tel que $p \subseteq q$, montrer en utilisant le principe d'induction précédent que $\forall n, E_p(n) \Rightarrow E_q(n)$.

Exercice 5 *Termes (6 points)*

On cherche à modéliser un morceau de musique simple pour le chant. Une partition est une suite de *notes* de musique et de *silences*. Une note de musique est caractérisée par une *durée* et une *hauteur*. Un silence est caractérisé par une durée.

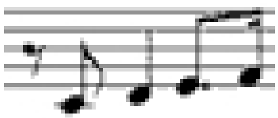
On choisit de représenter la hauteur d'une note par un entier de 1 à 88. Chaque entier correspond à une touche sur un clavier de piano, numérotées de la note la plus grave (numéro 1) à la note la plus aigüe (numéro 88).

La *durée* représente un nombre de *temps* pendant lequel il faut chanter (ou au contraire se taire pour un silence). Par exemple une croche représente un demi-temps, une note noire représente un temps, une note blanche représente deux temps.... Cette durée sera représentée par un nombre rationnel ($d \in \mathbb{Q}$).

La signature utilisée pour des termes représentant un `chant` se compose de trois symboles :

- `note` : $\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow$ `chant`
- `silence` : $\mathbb{Q} \rightarrow$ `chant`
- `seq` : `chant` $\times$ `chant` $\rightarrow$ `chant`

Le terme `note`(d, h) représente la note de durée d et de hauteur h ; `silence`(d) représente un silence de durée d ; `seq`(c_1, c_2) représente un morceau où on commence par exécuter les notes et silences de c_1 puis ceux de c_2. L'exemple ci-dessous illustre la représentation d'un morceau.



`seq(seq(silence(0.5),note(0.5,40)),`
`seq(note(1,42),seq(note(0.75,44),note(0.25,45))))`

On définit de façon récursive sur les termes qui représentent un chant une fonction *nb_temps* qui étant donné un chant renvoie sa durée totale par les équations suivantes :

$$nb\_temps(\texttt{note}(d, h)) = d \qquad nb\_temps(\texttt{silence}(d)) = d$$

$$nb\_temps(\texttt{seq}(c_1, c_2)) = nb\_temps(c_1) + nb\_temps(c_2)$$

1. Définir de la même manière de façon récursive une fonction *le* qui étant donnés une hauteur de note h et un chant c, renvoie un booléen qui est vrai si la note h est plus basse que toutes les notes du chant c.

2. Définir de façon récursive une fonction *in* qui étant donnés une hauteur de note h et un chant c, renvoie un booléen qui est vrai si une note de hauteur h apparait dans le chant c.
3. Donner le principe d'induction sur les termes représentant un chant.
4. Montrer en utilisant ce principe que pour tout chant c, si $le(h_1, c)$ et $in(h_2, c)$ alors $h_1 \leq h_2$.
5. On cherche à caractériser un chant dans lequel les notes vont en montant. C'est à dire que si une note n est chantée avant la note m alors la hauteur de n est inférieure ou égale à la hauteur de m. On note $\texttt{montant}(c)$ cette propriété. Donner des règles d'inférence pour définir $\texttt{montant}(c)$.
   Indications
   - On remarquera que une note seule ou un silence vérifient la propriété `montant` et que pour que les notes de $\texttt{seq}(c_1, c_2)$ aillent en montant, il faut et il suffit qu'il existe une hauteur h telle que les notes de c_1 soient plus basses que h et les notes de c_2 soient plus hautes que h et que c_1 et c_2 soient eux-mêmes des chant qui aillent en montant.
   - On pourra utiliser sans la redéfinir une fonction *ge* analogue à *le* qui étant donnés une hauteur h et un chant c renvoie vrai si la note h est plus haute que toutes les notes du chant c.