Licence STS, semestre 4 — 2012–13
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 15 janvier 2014
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

Examen session 2 - 27 juin 2013

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 2 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les questions sont largement indépendantes.

Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso. Le tableau résumant les règles de la déduction naturelle est donné à la fin du sujet.

Les copies doivent être **cachetées**.

Exercice 1 *Logique (3 points)*

Les formules suivantes sont-elles prouvables ?

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A$
2. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg A \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow C$

Si oui, on donnera une dérivation en utilisant les règles élémentaires de la logique, sinon on proposera des valeurs de vérité pour A, B et C qui rendent la formule fausse. On rappelle que le symbole d'implication associe à droite et donc que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ correspond à $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

Exercice 2 *Modélisation (6 points)*

On cherche à modéliser un système de transport. Pour cela on se donne un ensemble S pour les chaînes de caractères qui permettent de représenter les noms des villes. On introduit une relation binaire `ligne` $\subseteq S \times S$ tel que `ligne`(d, a) est vérifié s'il y a une ligne directe qui permet d'aller de la ville d à la ville a. On suppose que la relation contient (entre autres) les éléments suivants :

`ligne`(Paris,Nantes)	`ligne`(Paris,Berlin)
`ligne`(Paris,Lyon)	`ligne`(Lyon,Zurich)

1. Écrire des formules logiques qui expriment les propriétés ci-dessous et dire à quelle propriété classique de la relation binaire `ligne` (réflexive, symétrique, transitive ...), cela correspond.
   (a) aucune ligne ne revient à son point de départ ;
   (b) si il y a une ligne qui permet d'aller de la ville d à la ville a alors il en existe une qui assure le retour de la ville a à la ville d ;
2. Donner un système d'inférence pour définir une relation binaire `trajet` telle que `trajet`(d, a) est vrai si on peut aller de la ville d à la ville a en empruntant une ou plusieurs lignes.
3. Montrer en utilisant les règles d'inférence précédentes que `trajet`(Paris,Zurich).
4. Énoncer le principe d'induction associé à la relation `trajet`.

5. Montrer en utilisant ce principe d'induction que si la relation `ligne` est symétrique alors il en est de même de la relation `trajet`.

Exercice 3 *Mots binaires (11 points)*

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{0, 1\}$. On note $\mathbb{B}^n$ l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^*$ l'ensemble des mots finis (de longueur quelconque).

Partie A *Cardinaux (5 points)*

1. Donner en extension l'ensemble $\mathbb{B}^2$ des mots de longueur 2.
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des mots de longueur 3, de longueur n ?
3. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^m$?
4. On suppose qu'il existe une application injective de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^m$, que peut-on en déduire sur n et m ? même question pour f surjective.
5. L'ensemble $\mathbb{B}^*$ est-il fini ? dénombrable ?

Partie B *Ordre (6 points)*

On introduit une relation binaire $\prec$ sur $\mathbb{B}^*$ par le système d'inférence suivant dans lequel $x \in \mathbb{B}$ et $m, m_1, m_2 \in \mathbb{B}^*$:

$$\frac{}{\epsilon \prec xm} \qquad \frac{}{0m_1 \prec 1m_2} \qquad \frac{m_1 \prec m_2}{xm_1 \prec xm_2}$$

On admettra sans le démontrer que cette relation est un ordre strict sur les mots.

1. Montrer que $100 \prec 11$.
2. Comparer les mots 0000, 00 et 1.
3. Définir par des équations récursives une fonction $\texttt{test} \in \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ telle que $\texttt{test}(m_1, m_2)$ est vrai exactement lorsque $m_1 \prec m_2$. On pourra introduire des équations pour les quatre cas :

$$\texttt{test}(\epsilon, \epsilon) = \ldots \quad \texttt{test}(\epsilon, xm) = \ldots \quad \texttt{test}(xm, \epsilon) = \ldots \quad \texttt{test}(xm_1, ym_2) = \ldots$$

4. Montrer que si $\texttt{test}(m_1, m_2)$ est faux alors soit $m_1 = m_2$, soit $m_2 \prec m_1$, (ce qui implique que la relation $\prec$ est un ordre total).
5. Si $x \in \mathbb{B}$, on note x^n le mot de longueur n qui ne contient que des x. On peut définir ce mot par des équations récursives sur n :

$$x^0 = \epsilon \qquad x^{n+1} = x(x^n)$$

   Montrer par récurrence sur n les deux propriétés suivantes :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \prec x^{n+1}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, 0^n \prec 1$
6. La relation $\prec$ est-elle un ordre bien fondé ? justifier votre réponse.

Rappel des règles logiques

Hypothèse	Classique	Coupure
$\dfrac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$

	Introduction(I)	Élimination(E)	Élim-Hypothèse(H)
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}$		$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \top \vdash A}$
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash C}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma, A \Rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash \forall x, P} \; x \notin \mathsf{VI}(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x, P}{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}$	$\dfrac{\Gamma, (\forall x, P), P[x \leftarrow t] \vdash C}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash C}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x, P}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x, P \qquad \Gamma, P \vdash C}{\Gamma \vdash C} \; x \notin \mathsf{VI}(\Gamma, C)$	$\dfrac{\Gamma, P \vdash C}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash C} \; x \notin \mathsf{VI}(\Gamma, C)$