Partiel - 16 mars 2011

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 4 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscripte recto-verso.

Exercice 1 *Logique (4 points)*

Soit la formule $M = (\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$

1. Donner la table de vérité de M.
2. Construire une preuve en déduction naturelle de la formule M.

Correction :

1.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	M
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

2. on note Γ la suite de formules $\neg P \vee Q, \neg Q, P$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg P \vee Q}\,hyp \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg P \vdash \neg P}\,hyp \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg P \vdash P}\,hyp}{\Gamma, \neg P \vdash \bot}\,\neg E \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, Q \vdash \neg Q}\,hyp \quad \dfrac{}{\Gamma, Q \vdash Q}\,hyp}{\Gamma, Q \vdash \bot}\,\neg E}{\Gamma \vdash \bot}\,\vee E}{\neg P \vee Q, \neg Q \vdash \neg P}\,\neg I}{\neg P \vee Q \vdash \neg Q \Rightarrow \neg P}\,\Rightarrow I}{\vdash (\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P}\,\Rightarrow I
$$

Exercice 2 *Fonctions (4 points)*

Soient X un ensemble et A et B deux sous-ensembles de X et f une application de X dans X.

1. Rappeler les définitions de $f(A)$, l'image de A par f et de $f^{-1}(A)$, l'image inverse de A par f.
2. Montrer que si A est non vide alors $f(A)$ est non vide.
3. Donner un exemple de fonction f pour laquelle A est non-vide mais $f^{-1}(A)$ est vide.
4. À quelle condition sur f peut-on garantir que $f^{-1}(A)$ est non-vide lorsque A est non-vide ? prouver ce résultat.

Correction :

1. $f(A) = \{y \in X \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$
2. *si A est non vide, soit $x \in A$, on a $f(x) \in f(A)$ donc $f(A)$ est non vide.*
3. *Soit un ensemble X contenant deux éléments $\{a; b\}$ et f une fonction telle que $f(a) = f(b) = a$. On a $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ et $\{b\} \neq \emptyset$.*
4. *Si f est surjective alors $f^{-1}(A)$ est non-vide dès que A est non vide. En effet si A est non vide, soit $y \in A$, comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et donc $x \in f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(A) \neq \emptyset$.*

Exercice 3 *Modélisation (5 points)* On cherche à modéliser un emploi du temps pour un étudiant donné. L'emploi du temps permet de connaître pour une date donnée, quels sont les cours à suivre, et pour chaque cours, l'heure de début et celle de fin, ainsi que la salle.

1. Expliquer comment représenter l'emploi du temps à l'aide d'ensembles et de fonctions construits à partir des entiers (on pourra supposer que chaque cours est identifié par un entier).
2. Donner une formule logique qui indique que dans l'emploi du temps, deux cours ne peuvent pas se chevaucher.
3. Donner une formule logique qui pour un ensemble de cours E traduit le fait que tous les cours de cet ensemble apparaissent bien dans l'emploi du temps.

Correction :

1. *On introduit des ensembles intermédiaires :*
   $\texttt{cours} = \mathbb{N}, \texttt{salle} = \mathbb{N}, \texttt{date} = \{(d, m, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq d \leq 31 \wedge 1 \leq m \leq 12 \wedge 2010 \leq y\}$
   $\texttt{heure} = \{(h, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 7 \leq h \leq 20 \wedge 0 \leq m \leq 59\}$

   Chaque créneau de l'emploi du temps peut se représenter par l'intitulé du cours, la salle, le jour, l'heure de début et l'heure de fin.

   $\texttt{creneau} = \texttt{cours} \times \texttt{salle} \times \texttt{date} \times \texttt{heure} \times \texttt{heure}$

   On pourrait imposer que l'heure de fin du cours est postérieure à l'heure de début.

   Un emploi du temps est un ensemble (fini) de créneaux.
   $\texttt{edt} = \wp(\texttt{creneau})$
2. *On peut définir une relation sur les heures qui dit qu'une heure précède l'autre :* $\texttt{avant}((h_1, m_1), (h_2, m$ $h1 < h2 \vee h_1 = h_2 \wedge m_1 \leq m_2$ *puis que deux intervalles de temps ne se chevauchent pas (la fin du premier est avant le début du second ou le debut du premier est après la fin du second) :* $\texttt{apart}((d_1, f_1), (d_2, f_2))) = \texttt{avant}(f_1, d_2) \vee \texttt{avant}(f_2, d_1)$

   Un emploi du temps $e \in \texttt{edt}$ est bien formé si pour deux cours quelconques le même jour, soit ils sont égaux soit les créneaux ne se chevauchent pas $\forall (c_1, s_1, j_1, d_1, f_1)(c_2, s_2, j_2, d_2, f_2) \in e, d_1 = d_2 \Rightarrow (c_1, s_1, j_1, d_1, f_1) = (c_2, s_2, j_2, d_2, f_2) \vee \texttt{apart}((d_1, f_1), (d_2, f_2))$
3. *Soit E un ensemble de cours, le fait que l'emploi du temps inclut bien au moins un créneau pour chaque cours s'écrit :* $\texttt{contient}(E, e) = \forall c \in E, \exists (c_1, s_1, j_1, d_1, f_1) \in e, c = c_1$

Exercice 4 *Cardinaux (4 points)*

On se donne un alphabet A à trois caractères $\{a; b; c\}$. Sauf lorsqu'une preuve est demandée, on utilisera sans les redémontrer les résultat du cours sur les ensembles finis et dénombrables.

Soit A^n l'ensemble des mots de longueur n sur A

1. Caractériser en extension l'ensemble A^0.
2. Construire une bijection entre A^{n+1} et $A \times A^n$
3. Montrer par récurrence en utilisant les résultats précédents que l'ensemble A^n est fini, et donner son cardinal.
4. Montrer que l'ensemble A^* des mots sur l'alphabet A est dénombrable.

Correction :

1. $A^0 = \{\epsilon\}$
2. *soit* $m \in A^{n+1}$ *on lui associe le couple* (a, m') *avec* a *la première lettre* $a = m(0)$ *et* m' *la suite du mot :* $(m'(i) = m(i+1))$*. On vérifie aisément que cette fonction est injective et surjective.*
3. *Le résultat se prouve par récurrence sur* n*. On montre que* $|A^n| = 3^n$*.*
   (a) $A^0 = \{\epsilon\}$ *est fini et son cardinal est* $1 = 3^0$*.*
   (b) *Si* $0 < n$ *alors comme* A^n *et* $A \times A^{n-1}$ *sont en bijection, par hypothèse de récurrence* A^{n-1} *est fini, l'alphabet* A *est fini donc* A^n *est fini et* $|A^n| = |A| \times |A^{n-1}| = 3 \times |A^{n-1}| = 3 \times 3^{n-1}$ *donc* $|A^n| = 3^n$
4. *L'ensemble des mots* A^* *est l'union des mots de longueur* n *pour* $n \in \mathbb{N}$*. Une union dénombrable d'ensembles finis est dénombrable.*

Exercice 5 *Définition par cloture (5 points)*

Dans un réseau social, deux personnes peuvent décider d'être des « amis ». On modélise cela par un ensemble X d'utilisateurs du réseau et une relation binaire `ami` sur X, telle que `ami`(x, y) est vrai si x et y sont amis.

On souhaite définir la relation « être lié à » (notée `lié`) telle que « x est lié à y » si et seulement si y est un ami de x ou bien si y est lui-même lié à un ami de x.

1. Définir la relation `lié` à l'aide d'un système d'inférence.
2. Donner le principe d'induction simple associé à cette définition.
3. Montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $\forall x\, y\, z, \texttt{ami}(x, z) \Rightarrow \texttt{lié}(z, y) \Rightarrow \texttt{lié}(x, y)$
   (b) $\forall x\, y\, z, \texttt{lié}(x, z) \Rightarrow \texttt{ami}(z, y) \Rightarrow \texttt{lié}(x, y)$

   Suivant votre définition de `lié` *ces propriétés pourront être des conséquences de la définition ou devront être prouvées par induction.*
4. La relation `ami` est symétrique, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x\, y, \texttt{ami}(x, y) \Rightarrow \texttt{ami}(y, x)$$

   Montrer à l'aide du principe d'induction que la relation `lié` est aussi symétrique.

Correction :

1. $\dfrac{\mathtt{ami}(x,y)}{\mathtt{lié}(x,y)} \qquad \dfrac{\mathtt{ami}(x,z) \quad \mathtt{lié}(z,y)}{\mathtt{lié}(x,y)}$

2. *Le principe d'induction associé est : si* $\forall x\, y, \mathtt{ami}(x,y) \Rightarrow P(x,y)$ *et* $\forall x\, y\, z, \mathtt{ami}(x,z) \Rightarrow P(z,y) \Rightarrow P(x,y)$ *alors* $\forall x\, y, \mathtt{lié}(x,y) \Rightarrow P(x,y)$

3. *La première propriété est une conséquence de la définition de* $\mathtt{lié}$.
   La seconde $\forall x\, y\, z, \mathtt{lié}(x,z) \Rightarrow \mathtt{ami}(z,y) \Rightarrow \mathtt{lié}(x,y)$ *se montre par induction sur* $\mathtt{lié}(y,z)$, *en prenant la propriété* $P(x,z) = \forall y, \mathtt{ami}(z,y) \Rightarrow \mathtt{lié}(x,y)$. *Il suffit de montrer :*
   (a) $\forall x\, z, \mathtt{ami}(x,z) \Rightarrow P(x,z)$, *c'est-à-dire soit* x, z *et* y *tels que* $\mathtt{ami}(x,z)$ *et* $\mathtt{ami}(z,y)$ *on en déduit* $\mathtt{lié}(x,y)$ *en utilisant la définition de* $\mathtt{lié}$.
   (b) $\forall x\, z\, t, \mathtt{ami}(x,t) \Rightarrow P(t,z) \Rightarrow P(x,z)$. *Soit donc* $x\, z\, t\, y$ *tels que* $\mathtt{ami}(x,t)$, $P(t,z)$ *et* $\mathtt{ami}(z,y)$, *il faut montrer* $\mathtt{lié}(x,y)$. *De* $\mathtt{ami}(z,y)$ *et* $P(t,z)$ *on déduit* $\mathtt{lié}(t,y)$ *par hypothèse d'induction ; en utilisant* $\mathtt{ami}(x,t)$ *on en déduit par définition de* $\mathtt{lié}$ *que* $\mathtt{lié}(x,y)$.

4. *On doit montrer la propriété* $\forall x\, y, \mathtt{lié}(x,y) \Rightarrow \mathtt{lié}(y,x)$, *on utilise le principe d'induction en prenant comme formule* $P(x,y) = \mathtt{lié}(y,x)$. *Il suffit de montrer :*
   (a) $\forall x\, y, \mathtt{ami}(x,y) \Rightarrow P(x,y)$ *c'est-à dire que pour* x, y *tels que* $\mathtt{ami}(x,y)$, *on a* $\mathtt{lié}(y,x)$. *Or si* $\mathtt{ami}(x,y)$ *alors* $\mathtt{ami}(y,x)$ *et donc* $\mathtt{lié}(y,x)$.
   (b) $\forall x\, y\, z, \mathtt{ami}(x,z) \Rightarrow P(z,y) \Rightarrow P(x,y)$. *Soit donc* x, y *et* z *tels que* $\mathtt{ami}(x,z)$ *et* $\mathtt{lié}(y,z)$. *On a aussi* $\mathtt{ami}(z,x)$ *et donc en utilisant la question précédente, on déduit* $\mathtt{lié}(y,x)$.