Partiel - 16 mars 2012

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 4 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les seuls documents autorisés sont une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles de la déduction naturelle est donné à la fin du sujet.

Exercice 1 *Logique, 4 points*

1. Soit la formule $M = ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg P$.
   (a) Donner la table de vérité de cette formule.
   (b) Construire une preuve en déduction naturelle de M.
2. Soit la formule $M = (P \Rightarrow \forall x, Q) \vee ((\exists x, Q) \Rightarrow \neg P)$.
   (a) Cette formule est-elle valide (toujours vraie quels que soient P et Q) ? Peut-on construire une preuve de cette formule ? Cette formule est-elle satisfiable (existe-t-il des cas particuliers pour P et Q pour lesquels M est vraie) ?

Correction :

1. (a)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$	M
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

(b) Avec Γ le contexte $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q), P$, un arbre de dérivation de la formule M est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)}\,hyp}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}\,\wedge E \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,hyp}{\Gamma \vdash Q}\,\Rightarrow E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)}\,hyp}{\Gamma \vdash P \Rightarrow \neg Q}\,\wedge E \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,hyp}{\Gamma \vdash \neg Q}\,\Rightarrow E}{(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q), P \vdash \bot}\,\neg E}{(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q) \vdash \neg P}\,\neg I}{\vdash ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg P}\,\Rightarrow I$$

2. Pour répondre à la question si la formule est valide, on regarde à quelle condition elle pourrait être fausse.

La formule M est fausse si on a $(P \Rightarrow \forall x, Q)$ et $((\exists x, Q) \Rightarrow \neg P)$ qui sont faux. Pour que $(P \Rightarrow \forall x, Q)$ soit faux il faut que P soit vrai et $\forall x, Q$ soit faux. Si P est vrai alors $\neg P$ est faux et donc $((\exists x, Q) \Rightarrow \neg P)$ est faux si $(\exists x, Q)$ est vrai.

Donc si on choisit pour Q une formule qui est vraie pour certains x mais pas pour tout x (par exemple $x = 0$) et pour P une formule vrais alors M est faux. Donc la formule M n'est pas valide.

Par contre, si on prend pour P une formule fausse alors la formule M est vraie donc M est satisfiable.

Une formule non valide n'est pas prouvable.

Exercice 2 *Modélisation, 6 points*

On cherche à modéliser un championnat de football. Une équipe de football est composée de 11 joueurs et chaque joueur n'appartient qu'à une seul équipe. Au cours du championnat, chaque équipe affronte toutes les autres équipes deux fois, une fois dans son propre stade et une fois dans le stade de son adversaire. À l'issue d'un match, 3 points sont attribués à l'équipe gagnante, 0 point à l'équipe perdante, et 1 point est attribué aux deux équipes dans le cas d'un match nul. Le vainqueur du championnat est l'équipe qui totalise le maximum de points.

1. À l'aide des constructions ensemblistes vues en cours (relations, fonctions, ensemble des parties...) et de l'ensemble de base $\mathbb{N}$, on veut caractériser l'ensemble J des joueurs, l'ensemble E des équipes, l'ensemble M des matchs et l'ensemble R des résultats des matchs.

   On décide de représenter un joueur par un entier (son numéro de licence) auquel cas on peut caractériser J comme étant n'importe quel ensemble d'entiers $J \subseteq \mathbb{N}$. Proposer de même une caractérisation des équipes, matchs et des résultats. La donnée de ces 4 ensembles doit représenter complètement le déroulement de la compétition.
2. Exprimer à l'aide d'une formule logique le fait qu'un joueur n'appartient qu'à une seule équipe.
3. Exprimer à l'aide d'une formule logique le fait que chaque équipe rencontre toutes les autres deux fois.
4. S'il y a n équipes, donner le cardinal de l'ensemble des matchs.
5. On veut représenter le total des points d'une équipe e à la fin du championnat.
   (a) À partir des résultats R, définir une fonction `score` qui étant donné un match calcule le nombre de points que le match rapporte à l'équipe e.
   (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `SOMME` qui étant donné une fonction $f \in A \to \mathbb{N}$ et un sous-ensemble fini X de A, calcule l'entier $\Sigma_{x \in X} f(x)$. Donner l'expression qui représente le total des points de l'équipe e à la fin du championnat.

Correction :

1. *On représente les joueurs par un numéro :* $J \subseteq \mathbb{N}$*, les équipes sont des ensembles de joueurs de cardinal 11 :* $E \subseteq \{X \subseteq J \mid |X| = 11\}$ *; un match est un couple formé de deux équipes, on peut considérer que l'équipe en position 1 est celle qui accueille le match dans son stade :* $M \subseteq E \times E$ *; Finalement le résultat associe à chaque match un entier qui peut être* 0*,* 1 *ou* 3 *et qui indique si la première équipe a perdu, fait match nul ou bien gagné,* $R \in M \to \{0, 1, 3\}$*. Une autre prossibilité plus précis pour le résultat d'un match est d'associer un couple d'entiers représentant le nombre de buts marqué par chaque équipe.*
2. *Un joueur ne peut appartenir à deux équipes :* $\forall x \in J, \forall e_1 e_2 \in E, x \in e_1 \wedge x \in e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$ *; on peut ajouter que tout joueur appartient à au moins une équipe :* $\forall x \in J, \exists e \in E, x \in e$.
3. *Toutes les équipes se rencontrent exactement deux fois.* $\forall e_1 e_2 \in E, e_1 \neq e_2 \Rightarrow (e_1, e_2) \in M \wedge (e_2, e_1) \in M$*. On peut noter que notre représentation ensembliste ne permet pas de représenter un tournoi où il y aurait plusieurs matchs entre les mêmes équipes au même endroit.*
4. *Si les équipes se rencontrent toutes deux fois alors* $M = \{(e_1, e_2) \in E \times E | e_1 \neq e_2\} = E \times E \backslash \{(x, y) \in E \times E | x = y\}$ *donc le cardinal de* M *est égal au cardinal de* $E \times E$ *moins le cardinal de* $\{(x, y) \in E \times E | x = y\}$*. On a donc* $|M| = n \times n - n = n(n-1)$.
5. *(a)* $\mathtt{score} \in M \to \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{lll}
\mathtt{score}((e_1, e_2)) & = R(e_1, e_2) & \text{si } e = e_1 \\
\mathtt{score}((e_1, e_2)) & = 3 & \text{si } e = e_2 \text{ et } R(e_1, e_2) = 0 \\
\mathtt{score}((e_1, e_2)) & = 1 & \text{si } e = e_2 \text{ et } R(e_1, e_2) = 1 \\
\mathtt{score}((e_1, e_2)) & = 0 & \text{si } e = e_2 \text{ et } R(e_1, e_2) = 3 \\
\mathtt{score}((e_1, e_2)) & = 0 & \text{si } e \neq e_1 \text{ et } e \neq e_2
\end{array}
$$

(b) *Le total est donné par l'expression* `SOMME score` *M.*

Exercice 3 *Fonctions, 4 points*

Soit X un ensemble, A et B deux sous-ensembles de X et f une application de $X \to X$.

1. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
3. Trouver un contre-exemple à l'égalité des deux ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$. Donner une condition suffisante sur f pour que l'égalité soit vraie.
4. Comparer $f(A \backslash B)$ et $f(A) \backslash f(B)$. On rappelle que $X \backslash Y$ est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y.

Correction :

1. *Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$ alors $f(x) = y \in f(A)$; si $x \in B$, alors $f(x) = y \in f(B)$, donc $y \in f(A) \cup f(B)$.*

   Inversement, soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$; si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $f(x) = y$. Donc il existe $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$, d'où $y \in f(A \cup B)$.

   Donc $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. *Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in A$, $f(x) = y \in f(A)$, et comme $x \in B$, $f(x) = y \in f(B)$ donc $y \in f(A) \cap f(B)$.*

   Donc $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
3. *On choisit $X = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $f : X \to X$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$. On a $f(A \cap B) = \{1\}$ et $f(A) \cap f(B) = \{0\}$.*

   Il suffit que f soit injective pour que l'égalité soit vérifiée. En effet on a alors pour tout $y \in f(A) \cap f(B)$, $y \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $f(a) = y$ et $y \in f(B)$ donc il existe $b \in B$ tel que $f(b) = y$. Mais comme f est injective et $f(a) = y = f(b)$, on a aussi $a = b$ et donc $a \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$ donc au final $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$.
4. *Soit $y \in f(A) \backslash f(B)$ alors $y \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et $a not \in B$ car sinon on aurait $y \in f(B)$. Donc on a bien $y \in f(A \backslash B)$ et donc $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$.*

   Il n'y a pas égalité avec le même contre-exemple que précédemment : $f(A) = \{0, 1\}$ et $f(B) = \{0, 1\}$ donc $f(A) \backslash f(B) = \emptyset$ mais $f(A \backslash B) = f(\{0\}) = \{0\}$.

Exercice 4 *Ensembles et fonctions, 6 points*

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Soit f une application de $\wp(E) \to \wp(A) \times \wp(B)$ qui à tout sous-ensemble X de E associe un couple d'ensembles $(X \cap A, X \cap B)$. On rappelle que $\wp(E)$ est l'ensemble des parties de E.

1. *Juste pour cette question*, on suppose que $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$.
   (a) Décrire l'ensemble $\wp(E)$ en extension.
   (b) Donner les valeurs de f pour chaque élément de $\wp(E)$.
   (c) Cette fonction est-elle injective ? surjective ?

   Pour la suite de l'exercice on considère E, A et B quelconques tels que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$.
2. Donner les valeurs de $f(\emptyset)$ et $f(E \backslash (A \cup B))$.
3. À quelle condition sur A et B l'application f est-elle injective ? Montrer que c'est une condition suffisante.

4. Le couple $(\emptyset, B)$ possède-t-il un antécédent par f ?
5. À quelle condition sur A et B l'application f est-elle surjective ? Montrer que c'est une condition suffisante.

Correction :

1. On a $E = \{0,1,2\}$, $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$.

$x \in \wp E$	$f(x)$
$\emptyset$	$(\emptyset, \emptyset)$
$\{0\}$	$(\{0\}, \emptyset)$
$\{1\}$	$(\{1\}, \{1\})$
$\{2\}$	$(\emptyset, \{2\})$
$\{0,1\}$	$(\{0,1\}, \{1\})$
$\{1,2\}$	$(\{1\}, \{1,2\})$
$\{0,2\}$	$(\{0\}, \{2\})$
$\{0,1,2\}$	$(\{0,1\}, \{1,2\})$

On voit que f est injective car deux éléments différents ont des images différentes. Par contre f n'est pas surjective car $(\emptyset, \{1\})$ n'a pas d'antécedent (on peut aussi utiliser un argument de cardinalité : $\wp(A) \times \wp(B)$ a pour cardinal $2^2 \times 2^2 = 16 > 8 = 2^3 = |\wp(E)|$.

2. $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$ et $f(E \backslash (A \cup B)) = (\emptyset, \emptyset)$.

3. Il suffit que $A \cup B = E$ pour que f soit injective.
Supposons que $A \cup B = E$. Montrons que f est injective. Soit $X, Y \in E$ tels que $f(X) = f(Y)$. Montrons que $X = Y$. Si $f(X) = f(Y)$, alors $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. En particulier $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$. Or $(X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$ et $(Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap E = Y$, donc $X = Y$ et f est injective.

4. Le couple $(\emptyset, B)$ n'a un antécédent par f que s'il existe X tel que $f(X) = (\emptyset, B)$ et $X \cap A = \emptyset$ et $X \cap B = B$. On a donc $B \subseteq X$ et $X \cap A = \emptyset$. Il faut donc que $A \cap B = \emptyset$, et si cette condition est vérifiée alors on a $f(B) = (\emptyset, B)$.

5. Il suffit que $A \cap B = \emptyset$ pour que f soit surjective.
Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Montrons que f est surjective. Soit $(Y, Z) \in \wp(A) \times \wp(B)$, Montrons que $f(Y \cup Z) = (Y, Z)$ on a $(Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A)$ mais comme $Z \subseteq B$ et $B \cap A = \emptyset$ on a $(Z \cap A) = \emptyset$ et comme $Y \subseteq A$, on a $Y \cap A = Y$ et donc $(Y \cup Z) \cap A = Y$. De même $(Y \cup Z) \cap B = Z$ et doc $f(Y \cup Z) = (Y, Z)$ et f est surjective.

Rappel des règles logiques

Hypothèse	si $A \in \Gamma$ alors $\Gamma \vdash A$	
Connecteur	Introduction	Élimination
$\top$	$\Gamma \vdash \top$	
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash P \quad x \notin \mathsf{Fv}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x, P}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x, P}{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x, P}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x, P \quad \Gamma, P \vdash C \quad x \notin \mathsf{Fv}(\Gamma, C)}{\Gamma \vdash C}$