Partiel - 13 mars 2013

L'examen dure 2 heures. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les seuls documents autorisés sont une page A4 manuscripte recto-verso. Le tableau résumant les règles de la déduction naturelle est donné à la fin du sujet. **NE PAS CACHETER LES COPIES**.

Exercice 1 *Énigme logique, 4 points*

Un garçon (Bob) et deux filles (Alice et Carole) jouent dans le salon et ont cassé un vase. Leurs parents les interrogent pour savoir qui est coupable d'avoir touché le vase.

- Alice dit : « Carole a touché le vase et Bob n'a rien fait ».
- Bob dit : « Je suis innocent et l'une des filles a touché le vase ».
- Carole dit : « Si Alice a touché le vase alors Bob aussi ».

Les parents cherchent à comprendre ce qui s'est réellement passé. Pour résoudre le problème on introduit trois variables propositionnelles A pour « Alice a touché le vase », B pour « Bob a touché le vase » et C pour « Carole a touché le vase ».

1. Traduire les trois réponses des enfants en formules propositionnelles qui utilisent les variables A, B et C et les connecteurs logiques.
2. En considérant tous les cas possibles pour les variables A, B et C donner (dans un même tableau) les valeurs de vérité des trois formules précédentes.
3. À supposer que chaque enfant dise la vérité, peut-on déduire de la table de vérité précédente qui est coupable d'avoir touché le vase ? (Il peut y avoir plusieurs coupables.)
4. On suppose maintenant qu'un seul enfant ment, peut-on en déduire ce qui s'est passé et qui a menti ?

Correction :

1. – *Alice dit :* $C \wedge \neg B$
   – *Bob dit :* $\neg B \wedge (A \vee C)$
   – *Carole dit :* $A \Rightarrow B$

2.

	A	B	C	$C \wedge \neg B$	$\neg B \wedge (A \vee C)$	$A \Rightarrow B$
1	V	V	V	F	F	V
2	V	V	F	F	F	V
3	V	F	V	V	V	F
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	F	F	V
6	F	V	F	F	F	V
7	F	F	V	V	V	V
8	F	F	F	F	F	V

3. La situation où tous les enfants disent la vérité est la seule ligne (7) dans laquelle la valeur de chaque réponse est vrai : dans ce cas c'est Carole qui a touché le vase.

4. La situation où un seul enfant ment est la situation dans laquelle une des réponses est fausse et les deux autres vraies. Il n'y a qu'une ligne dans ce cas la ligne (3) dans laquelle c'est Carole qui ment et où à la fois Carole et Alice ont touché le vase.

Exercice 2 *Arbre de dérivation, 3 points*

Construire un arbre de dérivation (preuve en déduction naturelle) pour montrer les formules suivantes :

1. $((P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg P)$
2. $\neg(\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow ((\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow \neg R)$

Correction :

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{hyp}
\UnaryInfC{$A, B, \neg A, P \vdash A$}
\LeftLabel{$\wedge H$}
\UnaryInfC{$(A \wedge B), \neg A, P \vdash A$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{hyp}
\UnaryInfC{$(P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B), \neg A, P \vdash P$}
\LeftLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$(P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B), \neg A, P \vdash (P \vee Q)$}
\LeftLabel{$\Rightarrow H$}
\BinaryInfC{$(P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B), \neg A, P \vdash A$}
\LeftLabel{$\neg H$}
\UnaryInfC{$(P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B), \neg A, P \vdash \perp$}
\LeftLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$(P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B), \neg A \vdash \neg P$}
\LeftLabel{$\Rightarrow I$}
\UnaryInfC{$(P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B) \vdash \neg A \Rightarrow \neg P$}
\LeftLabel{$\Rightarrow I$}
\UnaryInfC{$\vdash ((P \vee Q) \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg P)$}
\end{prooftree}
$$

2. Pour alléger les notations, on n'a pas gardée l'hypothèse "éliminée" dans les prémisses des règles $\forall H$, $\neg H$ et $\Rightarrow H$ en effet dans ce cas précis ces hypothèses ne sont utilisées qu'une seule fois.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{hyp}
\UnaryInfC{$Q(x), R, P(x) \vdash Q(x)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{hyp}
\UnaryInfC{$R, P(x) \vdash P(x)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{hyp}
\UnaryInfC{$R, P(x) \vdash R$}
\LeftLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$R, P(x) \vdash P(x) \wedge R$}
\LeftLabel{$\Rightarrow H$}
\BinaryInfC{$P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x), R, P(x) \vdash Q(x)$}
\LeftLabel{$\forall H$}
\UnaryInfC{$(\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))), R, P(x) \vdash Q(x)$}
\LeftLabel{$\Rightarrow I$}
\UnaryInfC{$(\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))), R \vdash P(x) \Rightarrow Q(x)$}
\LeftLabel{$\forall I$}
\UnaryInfC{$(\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))), R \vdash \forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$}
\LeftLabel{$\neg H$}
\UnaryInfC{$\neg(\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))), (\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))), R \vdash \perp$}
\LeftLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$\neg(\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))), (\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))) \vdash \neg R$}
\LeftLabel{$\Rightarrow I$}
\UnaryInfC{$\neg(\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))) \vdash (\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow \neg R$}
\LeftLabel{$\Rightarrow I$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow ((\forall x, (P(x) \wedge R \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow \neg R)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3 *Cardinaux, 2 points*

Soit X un ensemble de cardinal 6 et Y un ensemble de cardinal 5. On pourra donner les résultats sous forme d'expression arithmétique sans calculer.

1. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications de X dans Y ? de l'ensemble des parties de Y ?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications injectives de X dans Y ? de l'ensemble des applications bijectives ?

Correction :

1. $|X \to Y| = |Y|^{|X|} = 5^6$, $\wp(Y) = 2^{|Y|} = 2^5$
2. *Il n'y a pas d'application injective (et a fortiori bijective) de X dans Y car le cardinal de Y est strictement inférieur à celui de X. Le cardinal de ces deux ensembles est donc* 0.

Exercice 4 *Modélisation, 5 points*

On cherche à modéliser le registre des emprunts d'une bibliothèque. Cette bibliothèque prête des livres. Chaque livre est identifié par un numéro entier unique (par exemple son numéro ISBN d'enregistrement à la bibliothèque nationale). Il peut y avoir plusieurs exemplaires du même livre, chaque exemplaire est aussi identifié par un numéro unique (par exemple un code-barre). La bibliothèque a également des usagers qui sont identifiés par un entier (leur numéro d'abonné).

On suppose donnés trois ensembles L, A et E qui sont des sous-ensembles de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et qui représentent l'ensemble des livres (L), des exemplaires (E) et l'ensemble des abonnés (A). La base documentaire de la bibliothèque fait le lien entre les références des exemplaires et celles des livres, elle est représentée par un ensemble $D \subseteq E \times L$. La base de prêts de la bibliothèque contient tous les emprunts en cours et est représentée par un ensemble $P \subseteq A \times E$.

1. Quelle condition l'ensemble D doit-il satisfaire pour représenter le fait qu'il y a exactement un livre associé à chaque exemplaire ?
2. La base de prêts P doit satisfaire trois contraintes :

(a) un exemplaire ne peut pas être emprunté par deux personnes différentes ;

(b) un abonné ne peut emprunter qu'un seul exemplaire d'un livre ;

(c) un abonné ne peut emprunter plus de 5 livres à la fois.

Exprimer ces trois contraintes comme des formules faisant intervenir les objets P, D, L, A et E et les notations ensemblistes.

3. Mme Machin souhaite emprunter le livre d'identifiant l.
   (a) Donner une expression ensembliste qui représente l'ensemble des exemplaires du livre que la bibliothèque possède dans son fond documentaire (qu'ils soient empruntés ou pas).
   (b) Donner une condition sur D, P et l pour qu'un exemplaire du livre soit disponible (non emprunté).

Correction :

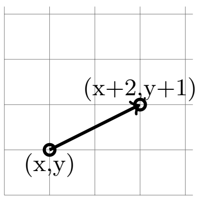
1. Il suffit de dire que D est une fonction de E dans L, c'est-à-dire $\forall e \in E, \exists l \in L, D(e,l)$ (il y a au moins un livre associé à chaque exemplaire) et $\forall e \in E, \forall l_1 l_2 \in L, D(e,l_1) \wedge D(e,l_2) \Rightarrow l_1 = l_2$ (il y a au plus un livre associé à chaque exemplaire). Comme D est une fonction, on pourra utiliser dans la suite la notation fonctionnelle $d(e)$ pour désigner l'unique livre l associé à l'exemplaire e. On pourra écrire $d(e) = l$ à la place de $D(e,l)$.

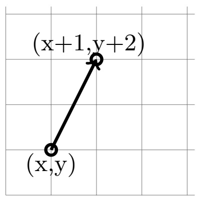
2. (a) $\forall a_1 a_2 \in A, \forall e \in E, P(a_1,e) \wedge P(a_2,e) \Rightarrow a_1 = a_2$
   (b) $\forall a \in A, \forall e_1 e_2 \in E, P(a,e_1) \wedge P(a,e_2) \Rightarrow e_1 = e_2 \vee d(e_1) \neq d(e_2)$
   (c) Du fait de la condition (a) (un abonné n'emprunte pas deux fois le même livre), le nombre de livres max correspond au nombre d'exemplaires max et on peut écrire $\forall a \in A, |\{e \in E | P(a,e)\}| \leq 5$. On peut aussi écrire : $\forall a \in A, |\{l \in L | \exists e \in E, P(a,e) \wedge d(e) = l\}| \leq 5$.

3. (a) L'ensemble des exemplaires du livre l est $d^{-1}(\{l\})$ ou encore $\{e \in E | d(e) = l\}$.
   (b) le livre est empruntable si $\{e \in E | d(e) = l \wedge \neg\exists a, P(a,e)\} \neq \emptyset$ on peut aussi écrire la condition sous la forme $\exists e \in E, (d(e) = l \wedge \neg\exists a, P(a,e))$.

Exercice 5 *Règles d'inférence et récurrence, 6 points*

On considère un pion qui se déplace sur des coordonnées entières ($x \geq 0, y \geq 0$). Deux mouvements sont possibles : soit x augmente de 2 et y augmente de 1, soit x augmente de 1 et y augmente de 2. Au départ le pion se trouve à la position $(0,0)$.





1. Définir sous forme de règles d'inférence une relation $P(x,y)$ qui décrit toutes les positions (x,y) possibles pour le pion. Les règles d'inférence traduiront la position initiale du pion et les déplacements possibles.
2. Montrer en utilisant les règles d'inférence que la position $(5,4)$ peut être atteinte.
3. Montrer par récurrence sur n que la position $(2n,n)$ peut toujours être atteinte.
4. Soit n quelconque, montrer par récurrence sur p que la position $(2n+p, 2p+n)$ peut toujours être atteinte.
5. Enoncer le principe d'induction associé à la définition de P.
6. Montrer que pour tout x et y, si $P(x,y)$ est vrai alors $x+y$ est un multiple de 3.
7. Le pion peut-il atteindre la position $(2,2)$? Justifiez votre réponse.
8. (Bonus) Montrer que les positions $(2n+p, 2p+n)$ sont les seules qui peuvent être atteintes. Le pion peut-il atteindre la position $(5,1)$?

Correction :

1.

$$a - \frac{}{P(0,0)} \qquad b - \frac{P(x,y)}{P(x+2,y+1)} \qquad c - \frac{P(x,y)}{P(x+1,y+2)}$$

2.

$$b\;\dfrac{b\;\dfrac{c\;\dfrac{a\;\dfrac{}{P(0,0)}}{P(1,2)}}{P(3,3)}}{P(5,4)}$$

3. On montre par récurrence sur n la propriété $P(2n, n)$.
   (a) Cas de base $n = 0$, la propriété $P(0, 0)$ est vraie du fait de la règle a.
   (b) Soit n quelconque tel que $P(2n, n)$ est vrai, montrons $P(2(n + 1), n + 1)$. On a $P(2(n + 1), n + 1) \Leftrightarrow P(2n + 2, n + 1)$ qui est vrai du fait de la règle b et de l'hypothèse de récurrence

   On en déduit $\forall n, P(2n, n)$.
4. Soit n quelconque, on montre par récurrence sur p la propriété $\phi(p) \stackrel{\text{def}}{=} P(2n + p, 2p + n)$.
   (a) Cas de base p=0, il faut montrer $P(2n, n)$ qui est vrai (question précédente)
   (b) Soit p quelconque tel que $\phi(p)$ est vrai, il faut montrer $\phi(p + 1)$. On a $\phi(p) = P(2n + p, 2p + n)$ et $\phi(p+1) = P(2n+(p+1), 2(p+1)+n)$. Or $P(2n+(p+1), 2(p+1)+n) \Leftrightarrow P((2n+p)+1, (2p+n)+2)$ qui est vérifié du fait de la règle c et de l'hypothèse de récurrence.
   (c) Le principe d'induction associé à la définition de P est le suivant :
   Soit une formule $Q(x, y)$ quelconque. Si
      i. $Q(0, 0)$
      ii. pour tout $x\,y \in \mathbb{N}$, $Q(x, y) \Rightarrow Q(x + 2, y + 1)$
      iii. pour tout $x\,y \in \mathbb{N}$, $Q(x, y) \Rightarrow Q(x + 1, y + 2)$

      alors $\forall x\,y, P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$
   (d) On prend comme propriété $Q(x, y)$ la propriété $x + y$ est un multiple de 3. On fait une preuve par induction sur la propriété $P(x, y)$ c'est-à-dire en utilisant le principe précédent. Il suffit de vérifier
      i. $Q(0, 0)$ c'est-à-dire que $0 + 0$ est un multiple de 3, ce qui est trivial
      ii. Soit x et y des entiers quelconques qui vérifient $Q(x, y)$ c'est-à-dire que $x + y$ est un multiple de 3, il faut montrer $Q(x + 2, y + 1)$, c'est-à-dire $x + 2 + y + 1$ est un multiple de 3, mais c'est évident car $x + 2 + y + 1 = x + y + 3$ et par hypothèse de récurrence, $x + y$ est un multiple de 3.
      iii. Soit x et y des entiers quelconques qui vérifient $Q(x, y)$ c'est-à-dire que $x + y$ est un multiple de 3, il faut montrer $Q(x + 1, y + 2)$, c'est-à-dire $x + 1 + y + 2$ est un multiple de 3, mais c'est évident car $x + 1 + y + 2 = x + y + 3$ et par hypothèse de récurrence, $x + y$ est un multiple de 3.

      On en déduit que toutes les positions (x, y) sur lesquelles le pion peut se déplacer sont telles que $x+y$ est un multiple de 3.
5. $2 + 2 = 4$ n'est pas un multiple de 3 donc la question précédente permet de justifier que le pion ne peut pas atteindre la case $(2, 2)$.
6. (BONUS) Nous allons montrer que si le pion arrive sur la case (x, y) alors il existe n et p tel que $x = 2n + p$ et $y = 2p + n$ par induction sur la relation $P(x, y)$. La formule $Q(x, y)$ à montrer est donc $\exists np \in \mathbb{N}, x = 2n + p \wedge y = 2p + n$. Il faut montrer les trois conditions :
   (a) $Q(0, 0)$ c'est-à-dire $\exists n\,p \in \mathbb{N}, 0 = 2n + p \wedge 0 = 2p + n$, il suffit de prendre $n = p = 0$
   (b) Soit $x\,y \in \mathbb{N}$ quelconques tels que $Q(x, y)$ c'est-à-dire qu'il existe n et p tel que $x = 2n+p$ et $y = 2p+n$. Il faut montrer $Q(x + 2, y + 1)$ c'est-à-dire $\exists n'\,p' \in \mathbb{N}, x + 2 = 2n' + p' \wedge y + 1 = 2p' + n'$. Il suffit de prendre $n' = n + 1$ et $p' = p$.
   (c) Soit $x\,y \in \mathbb{N}$ quelconques tels que $Q(x, y)$ c'est-à-dire qu'il existe n et p tel que $x = 2n+p$ et $y = 2p+n$. Il faut montrer $Q(x + 1, y + 2)$ c'est-à-dire $\exists n'\,p' \in \mathbb{N}, x + 1 = 2n' + p' \wedge y + 2 = 2p' + n'$. Il suffit de prendre $n' = n$ et $p' = p + 1$.

   On a vu que le pion pouvait atteindre toutes les positions de la forme $(2n + p, 2p + n)$ et on vient de montrer qu'il n'atteignait que des positions de cette forme. On a donc une caractérisation de l'ensemble des positions atteignables.

   $$P = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists n\,p \in \mathbb{N}, x = 2n + p \wedge y = 2p + n\}$$

   Si la position $(5, 1)$ est atteignable alors on devrait avoir deux entiers n et p tels que $5 = 2n + p$ et $1 = 2p + n$. La deuxième équation ne peut être vérifiée que pour $p = 0$ et $n = 1$ mais alors la première équation est fausse et donc cette position n'est pas atteignable.

Rappel des règles logiques

Hypothèse	Classique	Coupure
$\dfrac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$

	Introduction(I)	Élimination(E)	Élim-Hypothèse(H)
$\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top}$		$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \top \vdash A}$
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash C}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma, A \Rightarrow B \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash \forall x, P} \quad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x, P}{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}$	$\dfrac{\Gamma, (\forall x, P), P[x \leftarrow t] \vdash C}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash C}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash P[x \leftarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x, P}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x, P \qquad \Gamma, P \vdash C}{\Gamma \vdash C} \quad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, C)$	$\dfrac{\Gamma, P \vdash C}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash C} \quad x \notin \mathsf{Vl}(\Gamma, C)$