Licence STS, semestre 4 — 2013–14

Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 5 avril 2014

`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

Devoir Maison sur les preuves par récurrence

à rendre à votre chargé de TD avant le 16 avril 2014

Le but de ces questions est de s'entrainer à faire proprement des preuves par récurrence. Faîtes attention à votre rédaction, mettez bien en avant le schéma de preuve, ainsi que les moments où vous utilisez l'hypothèse de récurrence.

Exercice 1 *Récurrences Simples.* Dans les questions suivantes, vous devrez rédigez une récurrence classique pour montrer les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $\forall x \neq 1, 1 + x + x^2 \ldots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Exercice 2 *Récurrences Fortes.* Dans les questions suivantes, vous devrez rédigez une récurrence forte pour montrer les propriétés suivantes sur n. Pour rappel, le schéma d'une récurrence forte sur la propriété P se fait en deux étapes :

- Montrer que $P(0)$ est vrai.
- Soit n tel que pour tout $k \leq n$, $P(k)$ est vrai. Montrer que $P(n+1)$ est également vrai.

Questions.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \geq 2, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$
Montrez par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n, v_{n+1} = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum_{i=0}^{n} v_n \end{cases}$$
   (a) Calculez v_1, v_2, v_3, v_4.
   (b) Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, $v_n = 2^{n-1}$.
   (Vous pourrez utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice 1.)
3. Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, il existe p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$.