Licence STS, semestre 4 — 2010–2011
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 12 mars 2011
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

Révisions en vue du partiel

Exercice 1 *Logique.*

1. Donner la table de vérité de la formule $(P \Rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$. Cette formule est-elle une tautologie ?
2. Construire une preuve en déduction naturelle de la formule :
   $(\forall x, P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \forall x, \neg P(x)$

Correction :

1. *La formule est une tautologie dont la table de vérité est :*

P	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T

2. *On notera* Γ *la suite de formules* $(\forall x, P(x) \Rightarrow Q), \neg Q, P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg Q}\,hyp \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, P(x) \Rightarrow Q}\,hyp}{\Gamma \vdash P(x) \Rightarrow Q}\,\forall E \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash P(x)}\,hyp}{\Gamma \vdash Q}\,\Rightarrow E}{(\forall x, P(x) \Rightarrow Q), \neg Q, P(x) \vdash \bot}\,\neg E}{(\forall x, P(x) \Rightarrow Q), \neg Q \vdash \neg P(x)}\,\neg I}{(\forall x, P(x) \Rightarrow Q), \neg Q \vdash \forall x, \neg P(x)}\,\forall I}{(\forall x, P(x) \Rightarrow Q) \vdash \neg Q \Rightarrow \forall x, \neg P(x)}\,\Rightarrow I}{\vdash (\forall x, P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \forall x, \neg P(x)}\,\Rightarrow I$$

Exercice 2 *Fonctions.* Soient X un ensemble, A un sous-ensemble de X et f une application de X dans X.

1. Comparer les ensembles A, $f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(A))$. Si un ensemble est inclus dans l'autre on donnera une preuve, sinon on fournira un contre-exemple.
2. À quelle condition sur f a-t-on une égalité entre A et $f^{-1}(f(A))$? démontrer ce résultat.
3. À quelle condition sur f a-t-on une égalité entre A et $f(f^{-1}(A))$? démontrer ce résultat.

Correction :

1. *On a* $f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq f^{-1}(f(A))$. *En effet si* $x \in f(f^{-1}(A))$ *alors* $\exists y \in f^{-1}(A), f(y) = x$ *comme* $y \in f^{-1}(A)$ *on a* $f(y) \in A$ *donc* $x \in A$. *Par ailleurs si* $x \in A$ *alors* $f(x) \in f(A)$ *donc* $x \in f^{-1}(f(A))$.
   Les inclusions sont strictes. Si on prend pour A *un ensemble à deux éléments* $\{a; b\}$ *et* f *une fonction telle que* $f(a) = f(b) = a$. *On a* $f^{-1}(\{a\}) = \{a; b\}$ *et* $f(\{a\}) = \{a\}$ *donc* $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a, b\} \neq \{a\}$. *On a* $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ *donc* $f(f^{-1}(\{b\})) = \emptyset \neq \{b\}$.

2. *Si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$. Il suffit de montrer $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ (l'autre sens ayant été démontré à la question précédente pour n'importe quelle fonction). Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, on a $x = y$ et donc $x \in A$.*
3. *Si f est surjective, alors $f(f^{-1}(A)) = A$. Il suffit de montrer $A \subseteq f(f^{-1}(A))$. Soit $x \in A$, il existe y tel que $f(y) = x$ donc $y \in f^{-1}(A)$. et comme $f(y) = x$, on en déduit que $x \in f(f^{-1}(A))$.*

Exercice 3 *Modélisation* On cherche à modéliser une base de données de livres dans une bibliothèque. Pour cela, on se donne comme primitif l'ensemble `string` des chaînes de caractères et on utilisera également l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers. Sur l'ensemble `string`, on utilisera le prédicat $t \prec u$ qui dit que le mot t apparaît comme un sous-mot du mot u.

1. Expliciter en langage naturel les caractéristiques de votre base (quelles informations sur un livre sont représentées dans la base : titre, disponibilité, ...)
2. Indiquer quel ensemble vous permet de représenter la base de livres (on pourra introduire des ensembles intermédiaires pour représenter certaines informations, les ensembles devront être choisis précisément).
3. On suppose donnée une base particulière B qui est un élément de l'ensemble que vous avez défini précédemment. Exprimer sous forme d'une définition par compréhension l'ensemble des auteurs qui ont écrit un livre dont le titre contient le mot « logique » et dont un exemplaire au moins est disponible dans la bibliothèque.

Correction :

1. (a) *Un livre sera représenté par ses auteurs, un titre (éventuellement une édition). Chacun de ces éléments peut se voir comme une chaine de caractères. Les auteurs peuvent se représenter par des ensembles non vides finis d'auteurs.*
   (b) *Un exemplaire d'un livre est composé d'un numéro (unique) qui permet de l'identifier et d'un livre. On pourrait également associer à un exemplaire une information qui permet de positionner l'exemplaire dans la bibliothèque (sous la forme d'une chaine de caractères ou d'un code).*
   (c) *Pour les livres empruntés, on peut garder pour chaque exemplaire l'information du nom de l'emprunteur et de la date de retour.*
2. *On introduit les ensembles suivants :*

$$\begin{array}{rcl}
\mathtt{auteurs} & = & \{X \in \wp(\mathtt{string}) \mid X \textit{ fini} \land X \neq \emptyset\} \\
\mathtt{titre} & = & \mathtt{string} \\
\mathtt{livre} & = & \mathtt{auteurs} \times \mathtt{titre} \\
\mathtt{exemplaire} & = & \mathbb{N} \times \mathtt{livre} \\
\mathtt{emprunteur} & = & \mathtt{string} \\
\mathtt{date} & = & \{(d,m,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq d \leq 31 \land 1 \leq m \leq 12 \land 2010 \leq y\} \\
\mathtt{emprunt} & = & \mathtt{exemplaire} \times \mathtt{emprunteur} \times \mathtt{date}
\end{array}$$

On modélise une base comme un ensemble d'exemplaires et un ensemble d'emprunts (les exemplaires empruntés) c'est-à-dire : $\mathtt{base}{=}\wp(\mathtt{exemplaire}) \times \wp(\mathtt{emprunt})$.

On peut restreindre les ensembles admissibles : on peut décider que tous les exemplaires qui apparaissent dans un emprunt restent repértoriés dans le premier ensemble.

$\mathtt{base}_1{=}\{(books, out) \in \mathtt{base} \mid \forall x \in \mathtt{exemplaire}, (\exists m \in \mathtt{emprunteur}, \exists d :\in \mathtt{date}, (x,m,d) \in out) \Rightarrow x \in books\}$.

Au contraire on peut vouloir qu'un livre emprunté passe de l'ensemble des exemplaires à l'ensemble d'emprunts. ce qui revient à avoir :
$\texttt{base}_2$=$\{(books, out) \in \texttt{base} \mid \forall x \in \texttt{exemplaire}, (\exists m \in \texttt{emprunteur}, \exists d :\in \texttt{date}, (x, m, d) \in out) \Rightarrow x \notin books\}$.

3. *L'ensemble qui nous intéresse est en prenant par exemple la deuxième modélisation de la base et en écrivant B sous la forme (B_b, B_o) :*

$$\{a \in \texttt{string} \mid \exists as : \texttt{auteurs}, \exists t \in \texttt{titre}, \exists i \in \mathbb{N}, (i, (as, t)) \in B_b \wedge a \in as \wedge \text{"logique"} \prec t\}$$

Exercice 4 *Cardinaux* Soit A un ensemble à trois éléments distincts $\{a; b; c\}$.

1. Décrire en extension l'ensemble $B = \wp(A)$ des parties de A.
2. Quel est le cardinal de l'ensemble B ?
3. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties de B (on ne cherchera pas à le construire) ?
4. L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans A est-il dénombrable ?

Correction :

1. $B = \wp(A) = \{\emptyset; \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}\}$ *cet ensemble à $8 = 2^3$ éléments.*
2. *Si A est de cardinal n alors l'ensemble des parties de A a pour cardinal 2^n donc $\wp(B)$ a pour cardinal $2^8 = 256$.*
3. *L'ensemble des fonctions de $N \to A$ n'est pas dénombrable. En effet on a montré que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'était pas dénombrable. Si on construit une application injective de $\wp(N)$ dans $N \to A$ alors on aura montré que $N \to A$ n'est pas dénombrable (sinon par composition on aurait une application injective de $\wp(N)$ dans N donc une bijection de $\wp(N)$ dans un sous ensemble de N et donc $\wp(N)$ serait fini ou dénombrable).*
   A chaque sous-ensemble P de $\wp(\mathbb{N})$ on associe la fonction $f_P \in \mathbb{N} \to A$ telle que $f_P(x) = a$ si $x \in P$ et $f_P(x) = b$ sinon. On vérifie que cette fonction est bien injective.

Exercice 5 *Définition récursive de fonction.* La fonction `fib` sur les entiers naturels est définie par les équations suivantes :

$$\texttt{fib}(0) = 1 \quad \texttt{fib}(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \Rightarrow \texttt{fib}(n) = \texttt{fib}(n-1) + \texttt{fib}(n-2)$$

- Donner le système d'inférence qui définit la relation correspondant à ces équations.
- Donner le principe d'induction associé à cette définition.
- Montrer que ces équations définissent une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Correction :

- *La relation correspondant à ces équations est définie par le système d'inférence :*

$$\frac{}{\textit{fib}(0,1)} \qquad \frac{}{\textit{fib}(1,1)} \qquad \frac{2 \leq n \quad \textit{fib}(n-2,x) \quad \textit{fib}(n-1,y)}{\textit{fib}(n, x+y)}$$

- *Le principe d'induction s'écrit pour une propriété $P(n,m)$, si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*
  1. $P(0, 1)$
  2. $P(1, 1)$

3. $\forall n\,x\,y \in \mathbb{N}, 2 \leq n \Rightarrow P(n-2,x) \Rightarrow P(n-1,y) \Rightarrow P(n,x+y)$

alors $\forall n\,m, \mathit{fib}(n,m) \Rightarrow P(n,m)$.

– *Le principe d'inversion nous donne également les propriétés d'inversions :*

$$\begin{array}{l} \forall m, \mathit{fib}(0,m) \Rightarrow m = 1 \\ \forall m, \mathit{fib}(1,m) \Rightarrow m = 1 \\ \forall n\,m, 2 \leq n \Rightarrow \mathit{fib}(n,m) \Rightarrow \exists x\,y \in \mathbb{N}, \mathit{fib}(n-2,x) \wedge \mathit{fib}(n-1,y) \wedge m = x+y \end{array}$$

Ces propriétés nous permettent de montrer que la relation est fonctionnelle :

$$\forall n\,m, \mathit{fib}(n,m) \Rightarrow \forall m', \mathit{fib}(n,m') \Rightarrow m = m'$$

Pour cela on fait une induction sur $\mathit{fib}(n,m)$ *en prenant pour* $P(n,m)$ *la formule* $\forall m', \mathit{fib}(n,m') \Rightarrow m = m'$. *Il faut montrer les 3 conditions :*

1. $P(0,1)$ *qui s'écrit* $\forall m', \mathit{fib}(0,m') \Rightarrow 1 = m'$
2. $P(0,1)$ *qui s'écrit* $\forall m', \mathit{fib}(1,m') \Rightarrow 1 = m'$
3. *pour* $2 \leq n$, x *et* y *tel que* $P(n-2,x)$ *et* $P(n-1,y)$ *il faut montrer* $P(n,x+y)$ *qui s'écrit :* $\forall m', \mathit{fib}(n,m') \Rightarrow x+y = m'$.

Les deux premiers cas correspondent aux propriétés d'inversion pour $n = 0$ *et* $n = 1$. *Dans le* 3*ème cas, on utilise aussi l'inversion pour* $2 \leq n$ *et* $\mathit{fib}(n,m')$ *on trouve* $\exists x'\,y' \in \mathbb{N}, \mathit{fib}(n-2,x') \wedge \mathit{fib}(n-1,y') \wedge m' = x'+y'$. *Soit donc* x' *et* y' *qui vérifient les conditions* $\mathit{fib}(n-2,x')$ *et* $\mathit{fib}(n-1,y')$. *De* $P(n-2,x)$ *et* $\mathit{fib}(n-2,x')$ *on déduit* $x = x'$. *De même de* $P(n-1,y)$ *et* $\mathit{fib}(n-1,y')$ *on déduit* $y = y'$. *On a donc* $m' = x+y$ *ce qui est le résultat souhaité.*
Les équations définissent bien une relation fonctionnelle fib. *On va montrer que cette fonction est totale. C'est-à-dire que* $\forall n, \exists m, \mathit{fib}(n,m)$. *On peut réutiliser le principe d'induction généralisé vu en TD :*

$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow (\forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1) \Rightarrow P(n+2)) \Rightarrow \forall n, P(n)$$

On prend pour $P(n)$ *la propriété* $\exists m, \mathit{fib}(n,m)$ *Il suffit donc de montrer :*

1. $P(0)$ *qui s'écrit* $\exists m, \mathit{fib}(0,m)$, *il suffit de prendre* $m = 1$
2. $P(1)$ *qui s'écrit* $\exists m, \mathit{fib}(1,m)$, *il suffit de prendre* $m = 1$
3. *Pour un* n *arbitraire tel que* $P(n)$ *et* $P(n+1)$, *il faut montrer* $P(n+2)$ *qui s'écrit* $\exists m, \mathit{fib}(n+2,m)$. *De* $P(n)$, *on déduit qu'il existe* x *tel que* $\exists x, \mathit{fib}(n,x)$ *; de* $P(n+1)$, *on déduit qu'il existe* y *tel que* $\exists y, \mathit{fib}(n+1,y)$ *; comme* $2 \leq n+2$ *il suffit de prendre* $m = x+y$ *pour montrer* $\exists m, \mathit{fib}(n+2,m)$.