

## TD1 - Logique

**Exercice 1** Un logicien affirme les deux propriétés suivantes :

- J'aime Marie ou j'aime Anne
- Si j'aime Marie alors j'aime Anne

1. Traduire ces deux propriétés sous forme logique en introduisant une variable  $M$  (resp  $A$ ) pour la propriété : le logicien aime Marie (resp. Anne).
2. Peut-on en déduire qu'il aime Marie? Anne?
3. (optionnel) Si on avait demandé au même logicien : « est-il vrai que si vous aimez Marie alors vous aimez Anne? » et qu'il ait répondu :
  - si c'est vrai alors j'aime Marie
  - si j'aime Marie alors c'est vraiComment cet échange se traduit-il en formules logiques? Que peut-on en déduire?

**Exercice 2** La contraposée d'une formule  $P \Rightarrow Q$  est la formule  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ , la réciproque est la formule  $Q \Rightarrow P$ , la contraposée de la réciproque est la formule  $\neg P \Rightarrow \neg Q$ .

1. Exprimer ces 4 formules en prenant pour  $P$  la propriété « il pleut » et pour  $Q$  la propriété « il y a des nuages ».
2. Pour  $P$  et  $Q$  arbitraires dire lesquelles de ces quatre formules sont équivalentes.
3. Attention aux usages courants qui ne respectent pas toujours les règles de la logique. Soit la formule  $P$  « Max fait son travail » et la formule  $Q$  « Max peut jouer sur l'ordinateur ». On suppose que la formule  $P \Rightarrow Q$  est vérifiée. Peut-on en déduire que si Max ne fait pas son travail alors il ne pourra pas jouer sur l'ordinateur?
4. La formule  $\exists x \in A, P$  est une abréviation pour  $\exists x, x \in A \wedge P$  et  $\forall x \in A, P$  est une abréviation pour  $\forall x, x \in A \Rightarrow P$ .  
Soit  $P$  la formule  $\forall x \in A, \exists y \in B, R(x, y)$  et  $Q$  la formule  $\exists y \in B, \forall x \in A, R(x, y)$ .
  - (a) Exprimer  $P$  et  $Q$  en prenant pour  $A$  l'ensemble des hommes,  $B$  l'ensemble de femmes et pour le prédicat  $R(x, y)$  la propriété «  $y$  aime  $x$  ».
  - (b) A-t-on  $P \Rightarrow Q$ ? La réciproque est-elle vraie?

**Exercice 3** *Table de vérité*

Soit la formule  $M$  définie comme  $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow P \wedge (Q \vee R)$ . Cette formule est-elle vraie pour certaines valeurs de  $P$ ,  $Q$  et  $R$ ? Est-elle valide en général?

**Exercice 4** On se donne un langage avec une constante moi, et les prédicats suivants :

- aime( $x, y$ ) : “ $x$  aime  $y$ ”
- mange( $x, y$ ) : “ $x$  mange  $y$ ”
- legume( $x$ ) : “ $x$  est un légume”

Traduire les affirmations suivantes en formule logique utilisant le vocabulaire précédent

1. Je ne mange pas de légumes
2. Je n'aime pas les légumes mais je les mange
3. J'aime tout sauf les légumes
4. Tout le monde mange au moins un légume

**Exercice 5** *Déduction naturelle*

Soient les formules :

1.  $P \wedge Q \Rightarrow R \Rightarrow Q \wedge R$
  2.  $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \wedge Q \Rightarrow R$
  3.  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$
  4.  $P \vee Q \wedge R \Rightarrow P \vee Q$
  5.  $P \vee \neg P$  (on pourra commencer par prouver  $\neg\neg(P \vee \neg P)$ )
- Ajouter des parenthèses autour des connecteurs sans changer le sens de la formule.
  - Construire une preuve en déduction naturelle des propositions précédentes.