

## TD 2 - Logique des prédicats, théorie des ensembles

### Exercice 1 *Prédicats et déduction naturelle*

Construire une preuve en déduction naturelle des propositions suivantes.

1.  $\forall x, \exists y, x = y$
2.  $(\forall x, P(x)) \wedge (\forall y, P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall z, Q(z)$
3.  $(\exists x, P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$

**Exercice 2** *Parties d'un ensemble fini.* Donner en extension les ensembles  $\wp(\mathbb{B})$  et  $\wp(\wp(\mathbb{B}))$  dans les cas suivants

1.  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ ,
2.  $\mathbb{B} = \{0\}$ ,
3.  $\mathbb{B} = \emptyset$

### Exercice 3 *Ensemble en extension et en compréhension*

- Donner une définition en compréhension de l'ensemble  $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ .
- Donner une définition en extension des ensembles  $\{x \in \mathbb{N} \mid x(2x - 3) = -1\}$  et  $\{x \in \mathbb{R} \mid x(2x - 3) = -1\}$ .

### Exercice 4 *Modélisation*

On cherche à modéliser le registre de réservation d'un hôtel qui dispose de 50 chambres. On s'intéresse à savoir si les chambres sont ou non réservées à une date donnée.

Introduire des ensembles et une relation qui permettent de représenter ce registre. On précisera les propriétés de la relation.

**Exercice 5** *Modélisation (partiel 2011)* On cherche à modéliser un emploi du temps pour un étudiant donné. L'emploi du temps permet de connaître pour une date donnée, quels sont les cours à suivre, et pour chaque cours, l'heure de début et celle de fin, ainsi que la salle.

1. Expliquer comment représenter l'emploi du temps à l'aide d'ensembles et de fonctions construits à partir des entiers (on pourra supposer que chaque cours est identifié par un entier).
2. Donner une formule logique qui indique que dans l'emploi du temps, deux cours ne peuvent pas se chevaucher.
3. Donner une formule logique qui pour un ensemble de cours  $E$  traduit le fait que tous les cours de cet ensemble apparaissent bien dans l'emploi du temps.

**Exercice 6** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles quelconques. Comparer les ensembles  $(A \cap B) \cup C$  et  $A \cap (B \cup C)$ .