

TD 3 - Fonctions, ensembles finis

Exercice 1 Soient A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R} . Soit la fonction f de A dans B définie par $f(x) = x^2$. Donner des ensembles A et B pour que f soit (a) injective, (b) surjective, (c) bijective.

Exercice 2 *Image inverse d'une fonction.* Soient A et B deux ensembles. Soit f une fonction de $A \rightarrow B$ et Y_1 et Y_2 des sous-ensembles de B . Comparer $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ et $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 3 Soient A , B et C trois ensembles. Soit f une fonction de $A \rightarrow B$ et g une fonction de $B \rightarrow C$. La composition de g et f notée $g \circ f$ est une fonction de $A \rightarrow C$ définie par $(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$.

- Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- Trouver un exemple où $g \circ f$ est bijective avec f non surjective et g non injective.
- Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

Exercice 4 *Ensembles finis*

Soient A et B deux ensemble finis, montrer que $A \times B$ est fini et que $A \rightarrow B$ est fini. Donner le cardinal de chacun de ces ensembles en fonction du cardinal de A et du cardinal de B .

Exercice 5 Soit l'application f de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$.

1. Donner les valeurs de f pour $n = -2, -1, 0, 1, 2$
2. Montrer n et $f(n)$ sont toujours de parité différente
3. Montrer que f est bijective
4. Calculer $f(f(n))$ en déduire une expression de $f^{-1}(n)$
5. Résoudre l'équation $147 = n + (-1)^n$