Licence STS, semestre 4 2012–13
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) 20 février 2013
http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo

TD 4 - Cardinal, Ensembles dénombrables, Récurrence

Exercice 1 *Ensembles*

Soit E un ensemble de cardinal 4 et F un ensemble de cardinal 5.

1. Donner le cardinal des ensembles suivants :
   - $E \times F$;
   - $E \to F$;
   - $\wp(E \times F)$.
2. Donner le cardinal des ensembles suivants :
   - $(E \times E) \to E$, l'ensemble des applications de $E \times E$ dans E ;
   - $E \to (E \to E)$, l'ensemble des applications de E dans l'ensemble $E \to E$ des applications de E dans E.

   En déduire l'existence d'une bijection de $(E \times E) \to E$ dans $E \to (E \to E)$ (on ne cherchera pas à la construire explicitement).
3. Si $E = \{0, 1, 2, 3\}$, construire explicitement une bijection entre $\wp(E)$ et $[0, n[$ où n est le cardinal de $\wp(E)$.

Exercice 2 Soit n un entier et A un ensemble fini, montrer que s'il existe une application surjective de A dans $[0, n[$ alors $n \leq |A|$.

En déduire que si f est une application surjective dans $A \to B$ avec A et B des ensembles finis de même cardinal alors f est bijective.

Exercice 3 Soit l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites infinies de $\{0, 1\}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas dénombrable.
Idée : On suppose que l'on peut énumérer les suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ et on regardera la suite diagonale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - v(n)$ avec v la suite de numéro n.

Exercice 4 *Optionnel* Soit E un ensemble quelconque, montrer qu'il n'y a pas de bijection entre E et $\wp(E)$.

Exercice 5 *Récurrence sur les entiers*

Soit une tablette de chocolat comportant n carrés.

On souhaite la découper et pour cela on prend un morceau qui a au moins deux carrés et on sépare ce morceau en deux (le nombre de carrés dans chaque morceau est arbitraire)

Montrer que pour séparer la tablette en n morceaux, il faut procéder à exactement $n - 1$ découpes.