# TD 5 - récurrence, définitions par clôture

**Exercice 1** *Récurrence sur les entiers*

On définit un prédicat $\mathcal{N}_2$ sur les entiers naturels par les règles suivantes.

$$\frac{}{\mathcal{N}_2(0)} \qquad \frac{}{\mathcal{N}_2(1)} \qquad \frac{\mathcal{N}_2(x)}{\mathcal{N}_2(x+2)}$$

1. Donner les arbres de preuve correspondant aux dérivations de $\mathcal{N}_2(4)$ et $\mathcal{N}_2(5)$.
2. Prouver que tous les entiers naturels vérifient le prédicat $\mathcal{N}_2$, c'est-à-dire la formule $\forall x \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_2(x)$. (Idée : généraliser la propriété en montrant par récurrence $\forall x \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_2(x) \wedge \mathcal{N}_2(x+1)$).
3. Donner le schéma de preuve par induction associé à cette définition.
4. On définit une fonction $p \in \mathbb{N} \to \texttt{bool}$ qui vérifie :

$$p(0) = \texttt{true} \quad p(1) = \texttt{false} \quad \forall x \in \mathbb{N}, p(x+2) = p(x)$$

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, si $p(x) = \texttt{true}$ alors $x$ est un entier pair.

**Exercice 2** *Définitions par clôture*

Soit $P$ un ensemble de personnes. On se donne une relation $\mathsf{parent} \subseteq P \times P$ qui vérifie la propriété que toute personne de $P$ a exactement deux parents. Informellement, $\mathsf{parent}(x, y)$ est vrai lorsque $y$ est l'enfant de $x$.

1. Écrire à l'aide des connecteurs logiques une propriété qui caractérise la relation $\mathsf{parent}$.
2. Définir par des règles d'inférence la relation $\mathsf{ascendant}$ à partir de la relation $\mathsf{parent}$.
3. Définir la relation $\mathsf{frere}$ à partir de la relation $\mathsf{parent}$. On pourra utiliser une formule logique ou des règles d'inférence.
4. Définir la relation $\mathsf{cousin}$ à partir des relations $\mathsf{parent}$ et $\mathsf{frere}$.

**Exercice 3** *Définition par clôture (partiel 2010)*

Dans un réseau social, deux personnes peuvent décider d'être des « amis ». On modélise cela par un ensemble $X$ d'utilisateurs du réseau et une relation binaire $\texttt{ami}$ sur $X$, telle que $\texttt{ami}(x, y)$ est vrai si $x$ et $y$ sont amis.

On souhaite définir la relation « être lié à » (notée $\texttt{lié}$) telle que « $x$ est lié à $y$ » si et seulement si $y$ est un ami de $x$ ou bien si $y$ est lui-même lié à un ami de $x$.

1. Définir la relation $\texttt{lié}$ à l'aide d'un système d'inférence.
2. Donner le principe d'induction simple associé à cette définition.
3. Montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $\forall x\, y\, z, \texttt{ami}(x, z) \Rightarrow \texttt{lié}(z, y) \Rightarrow \texttt{lié}(x, y)$
   (b) $\forall x\, y\, z, \texttt{lié}(x, z) \Rightarrow \texttt{ami}(z, y) \Rightarrow \texttt{lié}(x, y)$

*Suivant votre définition de `lié` ces propriétés pourront être des conséquences de la définition ou devront être prouvées par induction.*

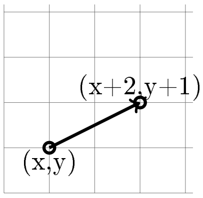
4. La relation `ami` est symétrique, c'est-à-dire que l'on a :

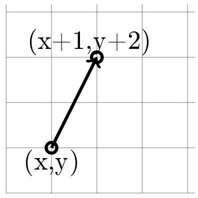
$$\forall x\, y, \texttt{ami}(x,y) \Rightarrow \texttt{ami}(y,x)$$

Montrer à l'aide du principe d'induction que la relation `lié` est aussi symétrique.

**Exercice 4** *Partiel 2013*

On considère un pion qui se déplace sur des coordonnées entières ($x \geq 0, y \geq 0$). Deux mouvements sont possibles : soit $x$ augmente de 2 et $y$ augmente de 1, soit $x$ augmente de 1 et $y$ augmente de 2. Au départ le pion se trouve à la position $(0,0)$.




1. Définir sous forme de règles d'inférence une relation $P(x,y)$ qui décrit toutes les positions $(x,y)$ possibles pour le pion. Les règles d'inférence traduiront la position initiale du pion et les déplacements possibles.
2. Montrer en utilisant les règles d'inférence que la position $(5,4)$ peut être atteinte.
3. Montrer par récurrence sur $n$ que la position $(2n,n)$ peut toujours être atteinte.
4. Soit $n$ quelconque, montrer par récurrence sur $p$ que la position $(2n+p, 2p+n)$ peut toujours être atteinte.
5. Enoncer le principe d'induction associé à la définition de $P$.
6. Montrer que pour tout $x$ et $y$, si $P(x,y)$ est vrai alors $x+y$ est un multiple de 3.
7. Le pion peut-il atteindre la position $(2,2)$ ? Justifiez votre réponse.
8. (Bonus) Montrer que les positions $(2n+p, 2p+n)$ sont les seules qui peuvent être atteintes. Le pion peut-il atteindre la position $(5,1)$ ?