Licence STS, semestre 4 — 2013–14

Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 17 mars 2014

`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

TD 6 - définitions récursives, mots

Exercice 1 Définir successivement par des équations récursives sur n, en utilisant les opérations arithmétiques usuelles (addition, multiplication) les fonctions suivantes :

1. $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$ avec la convention que $0! = 1$
2. k^n
3. ${}^{n}k = k^{\overbrace{k^{\cdot^{\cdot^{k}}}}^{n \text{ exposants}}}$

Exercice 2 *Définitions récursives sur* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On se donne les systèmes d'équations suivants :

$$f(0,0) = 1 \qquad \forall n\, m \in \mathbb{N}, f(n+1,m) = 2 \times f(n,m) \qquad \forall n\, m \in \mathbb{N}, f(n,m+1) = 3 \times f(n,m)$$

$$g(0,0) = 1 \qquad \forall nm \in \mathbb{N}, g(n+1,m) = 2 \times g(n,m)^2 \qquad \forall nm \in \mathbb{N}, g(n,m+1) = 3 \times g(n,m)$$

1. – Définir par des règles d'inférence la relation $F(n,m,y)$ correspondant à la relation $f(n,m) = y$.
   – Trouver y tel que $F(1,2,y)$, $F(2,1,y)$ et $F(2,2,y)$.
   – Justifier que les équations pour f définissent une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   – Que calcule cette fonction ?
2. Est-ce que les équations pour g définissent une fonction ?

Exercice 3 *Langage*

On se donne un alphabet formé de deux caractères [et], on définit une propriété $D(m)$ par les règles suivantes :

$$\frac{}{D([])} \qquad \frac{D(m)}{D([m])} \qquad \frac{D(m_1) \quad D(m_2)}{D(m_1 m_2)}$$

1. Dire si les mots suivants vérifient la condition D :

   [[]]   [[]][][]   [[]   []][[]

2. Donner le schéma de preuve associé à D.
3. Montrer que si $D(m)$ est vérifié alors le nombre de caractères [dans m est égal au nombre de caractères] dans m.
4. Définir sous forme de système d'inférence la propriété $\texttt{prefix}(n,m)$ qui dit que le mot n est un *préfixe* de m, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $m = np$.
5. Montrer que si $D(m)$ est vérifié alors pour tout mot n tel que $\texttt{prefix}(n,m)$, le nombre de caractères [dans n est supérieur ou égal au nombre de caractères] dans n.

A rendre à votre chargé de TD le mercredi 26 mars

Exercice 4 *Minimisation.* On se donne un prédicat T sur les entiers naturels et on cherche à justifier l'existence d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = n \quad \text{si } T(n) \qquad f(n) = f(n+1) \quad \text{si } \neg T(n)$$

1. Donner une définition par clôture de la relation $F(n, m)$ correspondant à cette définition récursive (ie $F(n, m) \Leftrightarrow f(n) = m$).
2. Écrire le principe d'induction associé à cette définition par clôture.
3. Montrer par induction sur la relation que si $F(n, m)$ est vérifié alors $n \leq m \wedge T(m)$.
4. Prouver par induction que la relation $F(n, m)$ est fonctionnelle.
5. À quelle condition sur $T(n)$ cette relation décrit-elle une fonction totale ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\exists m, F(n, m)) \Leftrightarrow (\exists m, n \leq m \wedge T(m))$. On pourra commencer par prouver $\forall k\, n, T(n + k) \Rightarrow \exists m, F(n, m)$ par récurrence sur l'entier k et utiliser le résultat de la question 3.
7. Comment peut-on caractériser la valeur calculée par $f(n)$?