Licence STS, semestre 4 — 2013–14
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 1er avril 2014
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

TD 8 - equivalence, ordres

Exercice 1 *Classes d'équivalence.* On se place sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Soit la relation $R(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y$ est pair.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Donner les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 2 *Diagramme cartésien d'une relation.* Soit A un ensemble fini. On peut représenter une relation binaire sur A par un *diagramme cartésien* qui est une grille dont chaque ligne et chaque colonne est indicée par un élément de A. On marque une case de la ligne x et de la colonne y exactement lorsque $R(x, y)$ est vérifié.

1. Dessiner le diagramme cartésien de la relation d'ordre usuelle $\leq$ sur les entiers pour $A = [0, 4[$.
2. Comment reconnait-on sur le diagramme cartésien qu'une relation est réflexive, symétrique, anti-symétrique ?
3. Comment reconnait-on sur le diagramme un élément maximum ? minimum ? maximal ? minimal ?
4. Si l'ensemble A a n éléments, combien y-a-t-il de relations binaires sur A ? de relations réflexives ? symétriques ?

Exercice 3 *Examen session 2-2013*

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{0, 1\}$. On note $\mathbb{B}^n$ l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^*$ l'ensemble des mots finis (de longueur quelconque).

On introduit une relation binaire $\prec$ sur $\mathbb{B}^*$ par le système d'inférence suivant dans lequel $x \in \mathbb{B}$ et $m, m_1, m_2 \in \mathbb{B}^*$:

$$\frac{}{\epsilon \prec xm} \qquad \frac{}{0m_1 \prec 1m_2} \qquad \frac{m_1 \prec m_2}{xm_1 \prec xm_2}$$

On admettra sans le démontrer que cette relation est un ordre strict sur les mots.

1. Montrer que $100 \prec 11$.
2. Comparer les mots 0000, 00 et 1.
3. Définir par des équations récursives une fonction $\texttt{test} \in \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ telle que $\texttt{test}(m_1, m_2)$ est vrai exactement lorsque $m_1 \prec m_2$. On pourra introduire des équations pour les quatre cas :

$$\texttt{test}(\epsilon, \epsilon) = \ldots \quad \texttt{test}(\epsilon, xm) = \ldots \quad \texttt{test}(xm, \epsilon) = \ldots \quad \texttt{test}(xm_1, ym_2) = \ldots$$

4. Montrer que si $\texttt{test}(m_1, m_2)$ est faux alors soit $m_1 = m_2$, soit $m_2 \prec m_1$, (ce qui implique que la relation $\prec$ est un ordre total).
5. Si $x \in \mathbb{B}$, on note x^n le mot de longueur n qui ne contient que des x. On peut définir ce mot par des équations récursives sur n :

$$x^0 = \epsilon \qquad x^{n+1} = x(x^n)$$

Montrer par récurrence sur n les deux propriétés suivantes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \prec x^{n+1}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, 0^n \prec 1$

6. La relation $\prec$ est-elle un ordre bien fondé ? justifier votre réponse.

Exercice 4 *Ordre et équivalence* On se donne un ensemble A et une relation R sur A qui est réflexive et transitive. On introduit la relation E définie par $E(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (R(x,y) \wedge R(y,x))$

1. Montrer que E est une relation d'équivalence. On appelle A/E l'ensemble des classes d'équivalence de A pour la relation E. Montrer que pour tout $X \in A/E$ on a $\forall x\, y \in X, R(x,y)$.
2. Soit $A = \{a,b,c,d\}$ et R la relation telle que $R(a,a)$, $R(b,b)$, $R(c,c)$, $R(d,d)$, $R(a,b)$, $R(b,a)$, $R(b,c)$, $R(a,c)$. Définir la relation E et donner les classes d'équivalence correspondantes.
3. On introduit la relation RE sur A/E par $RE(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x \in X, \exists y \in Y, R(x,y)$.
   (a) Montrer que $RE(X,Y) \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y, R(x,y)$.
   (b) Montrer que RE est une relation d'ordre sur A/E.
   (c) Construire la relation RE sur l'exemple de relation de la question précédente.