Licence STS, semestre 4 — 2013–14
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 14 avril 2014
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

TD 9 - ordres, algèbres de Boole

Exercice 1 *Ordres bien fondés*

Soient A et B des ensembles, B muni d'une relation d'ordre $\leq_B$ et $<_B$ l'ordre strict associé. Soit f une application de A dans B. On définit une relation sur A par $x <_A y \stackrel{\text{def}}{=} f(x) <_B f(y)$.

1. Montrer que $x <_A y$ est un ordre strict.
2. Montrer que si $<_B$ est un ordre bien fondé alors il en est de même de $x <_A y$.

Exercice 2 *Ordre structurel sur les arbres.* On rappelle que l'ensemble des arbres binaires T est défini par un ensemble de termes construits sur une signature avec deux symboles `leaf` et `node`. On définit une relation sur les arbres par $t \leq u$ si t est un sous-arbre de u.

1. Donner des règles d'inférence pour définir la relation $t \leq u$.
2. Montrer que si $t \leq u$ alors $\texttt{size}(t) \leq \texttt{size}(u)$.
3. Montrer que cette relation est un ordre et que $\forall t \in T, \texttt{leaf} \leq t$.
4. Cet ordre est-il total ?
5. Deux éléments ont-il toujours une borne supérieure ? une borne inférieure ?
6. Montrer que l'ordre ainsi défini est bien fondé.

Exercice 3 On considère l'ensemble A des relations binaires sur un ensemble E.

1. Expliquer comment munir A d'une structure d'algèbre de Boole. On explicitera les éléments $\perp$, $\top$, les opérations $\sqcup$, $\sqcap$ ainsi que l'opération de complément.
2. Si R et S sont des relations d'equivalence, en est-il de même de $R \sqcap S$? $R \sqcup S$? comment sont reliées les classes d'équivalence ?
3. Si R et S sont des relations d'ordre, en est-il de même de $R \sqcap S$? $R \sqcup S$?

Exercice 4 *Algèbre de Boole, Exam 1 - 2010*

On se place dans une algèbre de Boole (treillis distributif complémenté). On pourra utiliser les propriétés des algèbres de Boole vues en cours sans les redémontrer (loi de de Morgan, loi d'absorption, etc). Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall a\, b, \overline{\overline{a} \sqcup b} \sqcup a \sqcup a = \top$
2. $\forall a\, b\, c\, d, (\overline{a} \sqcup b) \sqcap (\overline{c} \sqcup d) \leq \overline{(a \sqcap c)} \sqcup (b \sqcap d)$
3. En utilisant l'algèbre des booléens, montrer qu'il existe a, b, c, d tels que :

$$(\overline{a} \sqcup b) \sqcap (\overline{c} \sqcup d) \neq \overline{(a \sqcap c)} \sqcup (b \sqcap d)$$

Exercice 5 *Dénombrement, Exam 1 - 2013*

Pour saisir son mot de passe, la banque postale affiche les chiffres de 0 à 9 sur un damier de 4 cases par 4 cases (certaines cases restent vides).

Combien y-a-t-il de configurations différentes ? (on pourra utiliser la fonction factorielle pour exprimer le résultat).