Licence STS, semestre 4 — 2011–2012
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 9 mai 2012
http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo

TP 5 - Récapitulatif noté

- Un squelette vous est fourni sur la page du cours.
- Vous devrez rendre votre copie, sous la forme d'un fichier Coq, à la fin de la séance en l'envoyant par e-mail à l'adresse `dcousine @lri.fr` avec un sujet contenant "MathInfo".

Exercice 1 (Logique propositionnelle)
On considère trois objets P, Q, R de type `Prop`.
Parmi les énoncés suivants, trois ne sont pas valides. Prouvez les cinq autres :

(a) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
(b) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
(c) $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow P \Rightarrow R)$
(d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow P)$
(e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$
(f) $(P \Rightarrow P) \Rightarrow P$
(g) $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$
(h) $(P \Rightarrow Q \vee R) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

(Aide : en cas d'hypothèses contradictoires, vous pouvez utiliser la tactique `contradiction`)

Exercice 2 (Min et Max)
On se propose de représenter la fonction de maximum entre deux entiers naturels par la relation `max` que l'on définit par clôture de la manière suivante :

$$\frac{}{max\ 0\ x\ x} \qquad \frac{}{max\ x\ 0\ x} \qquad \frac{max\ x\ y\ z}{max\ (S\ x)\ (S\ y)\ (S\ z)}$$

1. Définir `max` comme une relation inductive.
2. Définir de la même manière la relation `min` représentant la fonction de minimum entre deux entiers naturels.
3. Montrer que le minimum de deux entiers égaux est égal à ce même entier :

```
Lemma min_meme : forall x, min x x x.
```

4. Montrer que pour tout couple d'entiers, si l'un est le minimum de ce couple, alors l'autre en est le maximum (et inversement).

```
Lemma min_max : forall x y, min x y x <-> max x y y.
```

5. Montrer que la relation `max` est incluse dans la relation de maximum définie de manière non inductive :

   ```
   Lemma max_inc : forall x y z, max x y z -> (z=x /\ y <= x) \/ (z=y /\ x <= y).
   ```

   Aide : on pourra démontrer les résultats intermédiaires suivants :

   ```
   Lemma max_inc1 : forall x y z, max x y z -> z = x \/ z = y.
   Lemma max_inc2 : forall x y, max x y x -> y <= x.
   Lemma max_inc3 : forall x y, max x y y -> x <= y.
   ```

Exercice 3 (Ordre sur les fonctions)
On considère l'ensemble `seq` des fonctions de `nat` dans `nat`. On définit dessus une relation binaire `inf` par :

$$\texttt{inf}\, f\, g \overset{\text{def}}{=} \exists n,\ \texttt{inf}_\texttt{b}\ n\ f\ g$$

avec $\texttt{inf}_\texttt{b}$ définie par :

$$\texttt{inf}_\texttt{b}\, n\, f\, g \overset{\text{def}}{=} (\forall k < n, f(k) \leq g(k)) \ \wedge\ (f(n) < g(n))$$

Le but de l'exercice est de montrer que `inf` est un ordre strict.

1. Définir en Coq $\texttt{inf}_\texttt{b}$ et `inf`.

2. Soient `id` et `double` les éléments de `seq` définis par $\texttt{id}\, n \overset{\text{def}}{=} n$ et $\texttt{double}\, n \overset{\text{def}}{=} n + n$.
   Montrer que l'on a `inf id double`.

3. Montrer que `inf` est irréflexif :

   ```
   Lemma inf_irr : forall f:seq, ~(inf f f).
   ```

4. Nous allons maintenant montrer que `inf` est une relation transitive. Pour nous entraîner, nous allons commencer par montrer la transitivité de l'ordre point à point sur les éléments de `seq`.

   ```
   Lemma trans_ex : forall f g h : seq,
      (forall k:nat, f k <= g k)
   -> (forall k:nat, g k <= h k)
   -> (forall k:nat, f k <= h k).
   ```

   Pour cela, après avoir introduit les variables `f`, `g`, `h`, les hypothèses (que l'on nommera `H1` et `H2`) et la variable `k` (que l'on nommera `k0`), il faut ajouter au contexte (grâce à la tactique `assert` et l'utilisation des hypothèses `H1` et `H2`) les formules (`f k0 <= g k0`) et (`g k0 <= h k0`), ce qui permet de conclure grâce à la tactique `omega`.

5. Montrer les résultats intermédiaires suivants (en s'inspirant de la preuve du point précédent) :

   ```
   Lemma inf_trans1 : forall n:nat, forall f g h:seq,
                        inf_b n f g -> inf_b n g h -> inf f h.

   Lemma inf_trans2 : forall n1 n2:nat, forall f g h:seq,
                        n1 < n2 -> inf_b n1 f g -> inf_b n2 g h -> inf f h.

   Lemma inf_trans3 : forall n1 n2:nat, forall f g h:seq,
                        n1 > n2 -> inf_b n1 f g -> inf_b n2 g h -> inf f h.
   ```

6. En déduire que la relation `inf` est transitive.