TP 5 - Récapitulatif noté

Un squelette est fourni `http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo/tp_note_squelette.v`
À la fin de la séance, vous devrez rendre un fichier Coq commenté en l'envoyant par e-mail à votre chargé de TP avec un sujet `Rendu TP` :
- groupe 1 : `Asma.Tafat-Bouzid@lri.fr`,
- groupe 2 : `Christine.Paulin@lri.fr`,
- groupe 3 : `Mohamed.Iguernelala@lri.fr`.

Exercice 1 (Logique propositionnelle)
On considère trois objets P, Q, R de type `Prop`.
Parmi les énoncés suivants, trouvez ceux qui sont valides, prouvez-les et expliquer pourquoi les autres ne le sont pas.

1. $(\neg P \lor Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg(P \land \neg Q)$
3. $(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$
4. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
5. $(P \lor Q \lor R) \Rightarrow (P \lor Q)$
6. $(P \land Q \land R) \Rightarrow (P \land Q)$

Exercice 2 (Quantificateurs) On se donne un ensemble A et une relation binaire R sur A. Soit les formules
- $F_1 : \forall x, \exists y, (R(x,y) \land R(y,x))$
- $F_2 : \forall x, \exists y, (R(x,y) \lor R(y,x))$
- $F_3 : \forall x\, y\, z, (R(x,y) \land R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$
- $F_4 : \exists x, R(x,x)$

1. Montrer que $F_1 \Rightarrow F_2$
2. Montrer que $F_1 \Rightarrow (F_3 \Rightarrow F_4)$

Exercice 3 (Ordre bien fondé) On se donne un type A, une fonction `mes` de $A \to$ `nat`.

Soit f une fonction dans `nat` $\to A$.

On introduit la propriété $\texttt{decr}(f)$ qui est vraie lorsque $\forall n, \texttt{mes}(f(n+1)) < \texttt{mes}(f(n))$ et l'objet $\texttt{succ}(f)$ qui est une suite g telle que $g(n) = f(n+1)$.

1. Montrer que $\forall f, \texttt{decr}(f) \Rightarrow \texttt{decr}(\texttt{succ}(f))$
2. Montrer par récurrence sur n que $\forall n, \forall f, \texttt{mes}(f(0)) < n \Rightarrow (\texttt{decr}(f) \Rightarrow \bot)$.
   Indication : pour montrer la propriété pour $n+1$ et f on pourra penser à appliquer l'hypothèse de récurrence à la suite $\texttt{succ}(f)$.

3. En utilisant la question précédente, énoncer et démontrer la propriété "il n'y a pas de suite f telle que $\texttt{decr}(f)$".

Exercice 4 (Induction) On définit une relation `move` qui modélise des déplacements dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à la manière d'un cavalier aux échecs. La relation `move` est définie par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{}{\texttt{move}\,(x,y)\,(2+x,1+y)} \qquad \frac{}{\texttt{move}\,(x,y)\,(1+x,2+y)} \qquad \frac{\texttt{move}\,p\,q}{\texttt{move}\,q\,p} \qquad \frac{\texttt{move}\,(x,y)\,(z,t) \qquad u+t=2\times y}{\texttt{move}\,(x,y)\,(z,u)}$$

1. Définir de manière inductive la relation `move`.
2. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\texttt{move}\,(0,2)\,(1,4)$, $\texttt{move}\,(0,2)\,(1,0)$ et $\texttt{move}\,(1,0)\,(0,2)$
   (b) $\forall\, x\, y, \texttt{move}\,(1+x,2+y)\,(x,y)$
   (c) $\forall\, x\, y\, z\, t, (z=2+x \wedge y=1+t) \Rightarrow \texttt{move}\,(x,y)\,(z,t)$.
3. On introduit une relation `moves` qui correspond à une suite de déplacements. Cette relation est définie par le système d'inférence :

$$\frac{\texttt{move}\,p\,q}{\texttt{moves}\,p\,q} \qquad \frac{\texttt{moves}\,p\,q \qquad \texttt{moves}\,q\,r}{\texttt{moves}\,p\,r}$$

   (a) Définir de manière inductive la relation `moves`.
   (b) Enoncer et montrer que `moves` est une relation symétrique.
   (c) Montrer la propriété $\forall\, x\, y, \texttt{moves}\,(x,y)\,(1+x,y)$.
   (d) En déduire que le cheval peut se déplacer en ligne et atteindre toutes les positions à sa droite, c'est-à-dire : $\forall\, x\, x'\, y, x < x' \Rightarrow \texttt{moves}\,(x,y)\,(x',y)$.
   Indication : on pourra commencer par montrer : $\forall\, n\, x\, y, \texttt{moves}\,(x,y)\,((n+1)+x,y)$.