TP 4 - Définitions par clôture et équivalence

Comme d'habitude, un squelette vous est fourni sur la page du cours.

Exercice 1 (Entiers relatifs)
Dans cet exercice nous allons formaliser les entiers relatifs à partir des entiers naturels. On représente $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: la paire (p, q) représente l'entier relatif $(p - q)$. L'entier nul est par exemple représenté par la paire $(0, 0)$.
En Coq on pose `monZ := prod nat nat` ce qui veut dire qu'un objet de `monZ` est une paire d'entiers naturels. Si `p : monZ`, on peut accéder au premier entier de la paire avec `fst p`, au second avec `snd p`.

1. Définir la relation d'égalité `eq` sur `monZ`, en utilisant seulement l'addition mais pas la soustraction.
2. Exhiber une représentation de l'entier relatif 0 autre que $(0, 0)$.

   ```
   Theorem not_injective : eq zero (...,...).
   ```

3. Définir l'addition sur `monZ`.
   Montrer que ces opérations sont compatibles avec l'égalité sur notre représentation :

   ```
   Theorem add_compat_eq :
     forall x y x' y',
       eq x x' -> eq y y' ->
       eq (add x y) (add x' y').
   ```

4. Définir l'opposé `opp x` d'un nombre relatif `x`, montrer que cette opération est compatible avec notre égalité, et est l'inverse de l'addition :

   ```
   Theorem opp_compat_eq : (...).
   Theorem add_opp : forall x, eq zero (add x (opp x)).
   ```

5. Définir l'inégalité non-stricte `leq` entre entiers relatifs. Montrer qu'elle est réflexive par rapport à l'égalité sur les entiers relatifs représentés :

   ```
   Theorem reflexif : forall x y, eq x y -> leq x y.
   ```

   Énoncer et montrer qu'elle est transitive.

6. La relation `leq` est-elle symétrique ? antisymétrique ? Énoncez-le en Coq et démontrez le.

Exercice 2 (Définition de fonction par clôture)
On se propose de représenter la fonction d'addition par la relation `plus` que l'on définit par clôture de la manière suivante :

$$\frac{}{plus\ 0\ x\ x} \qquad \frac{}{plus\ x\ 0\ x} \qquad \frac{plus\ x\ y\ z}{plus\ x\ (S\ y)\ (S\ z)} \qquad \frac{plus\ x\ y\ z}{plus\ (S\ x)\ y\ (S\ z)}$$

1. Définir `plus` comme une définition inductive en Coq.
2. Montrer cette relation est symétrique et totale.
3. Montrer qu'elle est contenue dans l'addition :

   ```
   Theorem plus_plus : forall x y z, plus x y z -> z = x+y.
   ```

4. En déduire que la relation `plus` est fonctionnelle.
5. Peut-on enlever des règles d'inférence dans la définition de `plus` sans changer la relation obtenue ? Qu'est-ce que cela change dans les preuves des questions précédentes ?