

Examen session 2 - 15 juin 2015

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 4 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Le seul document autorisé est une page A4 manuscrite recto-verso.

Les copies doivent être **cachetées**. Reporter le numéro d'anonymat sur les feuilles intercalaires et les numéroter à l'emplacement prévu.

Exercice 1 *Enigme, 4 points*

Un juge interroge trois personnes A , B et C . Certaines disent toujours la vérité, d'autres mentent systématiquement. Le but est de trouver qui dit la vérité.

- A dit : "Aucun de nous ne dit la vérité." (P_A)
- B déclare : "Je dis la vérité." (P_B)
- C dit : "Au moins deux d'entre nous mentent." (P_C)

On introduit des variables propositionnelles V_A , V_B et V_C . Pour $X \in \{A, B, C\}$, la variable V_X est vraie si X dit la vérité et fausse si X est un menteur.

Questions.

1. Traduire les phrases P_A , P_B et P_C en des formules logiques propositionnelles qui pourront utiliser les variables V_A , V_B , et V_C .
2. Donner la table de vérité de ces formules en fonction des valeurs de V_A , V_B , et V_C .
3. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu être dite. On rappelle qu'un menteur ne peut pas dire une phrase vraie et que quelqu'un qui dit la vérité ne peut pas dire une phrase fausse.
4. En déduire qui dit la vérité parmi A , B et C ? justifier votre réponse.

Correction :

1. (a) $P_A \stackrel{\text{def}}{=} \neg V_A \wedge \neg V_B \wedge \neg V_C$
- (b) $P_B \stackrel{\text{def}}{=} V_B$
- (c) $P_C \stackrel{\text{def}}{=} (\neg V_A \wedge \neg V_B) \vee (\neg V_B \wedge \neg V_C) \vee (\neg V_A \wedge \neg V_C)$

	V_A	V_B	V_C	P_A	P_B	P_C	D_A	D_B	D_C
1	V	V	V	F	V	F	F	V	F
2	V	V	F	F	V	F	F	V	V
3	V	F	V	F	F	F	F	V	F
4	V	F	F	F	F	V	F	V	F
5	F	V	V	F	V	F	V	V	F
6	F	V	F	F	V	V	V	V	F
7	F	F	V	F	F	V	V	V	V
8	F	F	F	V	F	V	F	V	F

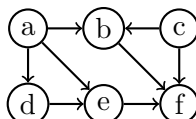
2. cf tableau ci-dessus, On a D_X est vrai si et seulement si $V_X \Leftrightarrow P_X$.
3. La seule situation dans laquelle les trois phrases peuvent être dites est celle de la ligne 7 dans laquelle A et B sont des menteurs et C dit la vérité.

Exercice 2 *Ordre topologique, 5 points*

On se donne un graphe orienté sur un ensemble fini de sommets A . On cherche à ordonner les sommets de A de manière totale et compatible avec la relation associée au graphe. C'est-à-dire que l'on veut construire une bijection σ de A dans $[1..n]$ (ce qui revient à numéroter les sommets du graphe) telle que s'il y a une arête de a vers b dans le graphe alors $\sigma(a) < \sigma(b)$. On dira dans la suite que σ est une **numérotation compatible** avec la relation du graphe.

Si on voit les sommets comme des tâches à réaliser (par exemple compiler un fichier) et si une arête entre a et b dans le graphe représente le fait que la tâche a doit être réalisée avant la tâche b , alors σ va nous donner une manière de réaliser les tâches l'une après l'autre sans risque de blocage.

1. Soit le graphe

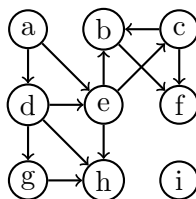


Proposer deux numérotations distinctes des sommets, compatibles avec la relation du graphe.

2. Montrer que si un graphe G contient un cycle alors il n'existe pas de numérotation σ compatible avec la relation du graphe.
3. Montrer que si un graphe a un nombre fini de sommets et que tous ces sommets ont un degré sortant strictement positif alors ce graphe a forcément un cycle. Donner un exemple de graphe infini pour lequel cette propriété est fausse.

Rappel : Le degré sortant du sommet x est le nombre d'arêtes du graphe qui ont x pour origine.

4. Soit un graphe G et a un sommet de degré sortant 0. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en retirant le sommet a et toutes les arêtes d'extrémité a . Montrer que s'il existe une numérotation compatible pour G' alors on peut aussi construire une numérotation compatible pour G .
5. Dédurre des questions précédentes une preuve par récurrence sur le nombre de sommets du fait que si G est un graphe orienté avec n sommets et sans cycle alors il existe une numérotation compatible.
6. La preuve précédente donne également un algorithme pour construire une telle numérotation. Appliquer cet algorithme au graphe suivant, donner la numérotation trouvée :



Exercice 3 *Modélisation, 3 points*

On se donne un langage avec une constante **moi** qui désigne la personne qui parle, un prédicat ternaire **parle**, trois prédicats binaires **ami**, **=** et **mange**.

- **parle**(t, x, y) représente le fait que x parle à y à l'instant t ;
- **ami**(x, y) représente le fait que x et y sont amis ;
- $x = y$ représente le fait que x et y sont égaux ;
- **mange**(t, x) représente le fait que x mange à l'instant t .

1. Traduire en (bon) français, les formules logiques suivantes :

(a) $\forall t x y, \text{mange}(t, x) \wedge \text{mange}(t, y) \Rightarrow x = y$

(b) $\forall x, \text{ami}(\text{moi}, x) \Rightarrow \exists t, \text{parle}(t, \text{moi}, x)$

2. Donner des formules logiques correspondant aux phrases suivantes :
 - (a) On ne parle pas en mangeant.
 - (b) Je ne parle pas à plus d'une personne à la fois.
3. Soit la phrase "Je ne parle qu'à mes amis"
 - (a) Traduire cette phrase comme une formule logique A .
 - (b) Donner la négation de cette formule comme une autre formule logique B , dans laquelle la négation ne pourra porter que sur les symboles de prédicat **parle** et **ami** (c'est-à-dire pas de négation sur une formule qui commence par un connecteur logique ou un quantificateur).
 - (c) Traduire la formule B précédente en une phrase en français.

Exercice 4 *Quadtree, 8 points*

On peut représenter des images carrées de taille $2^n \times 2^n$ en noir et blanc par des arbres quaternaires. Si le carré est uniformément noir on le représente par une constante N , s'il est uniformément blanc, on le représente par une constante B , sinon on découpe l'image en quatre quadrants a, b, c, d de côté 2^{n-1} (cf figure ci-dessous pour la position des quadrants), on construit récursivement des arbres q_a, q_b, q_c et q_d , correspondant à chacun des quadrants et on représente l'image complète par le nouvel arbre $\text{Quad}(q_a, q_b, q_c, q_d)$.

La signature des termes qui représentent les quadrees est donc formée de deux constantes N et B et d'un symbole Quad d'arité 4. L'ensemble des termes formés sur cette signature est noté QT .

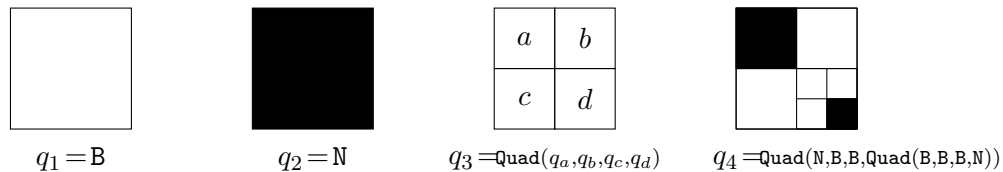
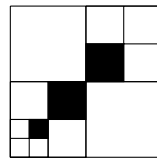


FIGURE 1 – Principe de construction des quadrees et exemple

1. Donner le terme qui correspond à l'image suivante :



2. Enoncer le principe de récurrence structurelle associé à la définition des quadtree.
3. On définit par des équations récursives sur la structure des quadtree une fonction inv qui prend en argument un arbre et change les carrés blancs en des carrés noirs et inversement.

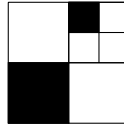
$$\text{inv}(N) = B \quad \text{inv}(B) = N \quad \text{inv}(\text{quad}(a, b, c, d)) = \text{quad}(\text{inv}(a), \text{inv}(b), \text{inv}(c), \text{inv}(d))$$

Montrer par récurrence sur la structure des quadtree la propriété suivante :

$$\forall t \in QT, \text{inv}(\text{inv}(t)) = t$$

4. Définir par des équations récursives sur la structure des quadtree une fonction nbnoirs qui prend en argument un quadtree et un entier n (si le quadtree représente une image dont le côté fait 2^n unités) et compte le nombre de carrés unitaires noirs dans l'image. On suppose que n est plus grand que la profondeur de l'arbre (c'est-à-dire le nombre max de nœuds Quad imbriqués). On a sur l'exemple de la figure 1 : $\text{nbnoirs}(2, q_4) = 5$, en effet si on considère l'image comme étant de 4×4 unités, le carré noir en haut à gauche est composé de 4 carrés unitaires.

5. Soit q un quadtree, montrer par récurrence sur n que si n est plus grand que la profondeur de q alors $\text{nbnoirs}(n + 1, q) = 4 \times \text{nbnoirs}(n, q)$.
6. On s'intéresse à une relation binaire **rot** entre les quadtree qui consiste à faire tourner des sous-quadrants un nombre arbitraire de fois (éventuellement 0). Une rotation élémentaire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir de $q_3 = \text{Quad}(q_a, q_b, q_c, q_d)$ donnera par exemple $q'_3 = \text{Quad}(q_b, q_d, q_a, q_c)$.
 - (a) Donner un système d'inférence pour définir la relation **rot**. On aura en particulier une règle d'inférence pour le cas de base qui correspond à ne faire aucune rotation, un cas dans lequel on fait tourner les sous-quadrants et un cas dans lequel on fait tourner le quadrant principal, sans oublier la possibilité d'enchaîner successivement ces opérations.
 - (b) Soit la figure



Définir le terme $q_5 \in QT$ correspondant à cette image et construire un arbre de dérivation qui prouve $\text{rot}(q_4, q_5)$.

- (c) Donner le principe d'induction associé à la définition de **rot**.
- (d) Utiliser ce principe pour montrer que pour tout $q, q' \in QT$, si $\text{rot}(q, q')$ alors $\text{nbnoirs}(q) = \text{nbnoirs}(q')$.