Licence STS, semestre 4 — 2014–15
Mathématiques pour l'Informatique 2 — 19 mars 2015
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo2`

Partiel - 10 mars 2015

L'examen dure 2 heures. L'énoncé est composé de 7 pages. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les seuls documents autorisés sont une page A4 manuscripte recto-verso.

NE PAS CACHETER LES COPIES.

Exercice 1 *Enigme (4 points).*

Dans un hôpital psychiatrique les docteurs disent toujours la vérité, les patients qui sont malades mentent toujours et les infirmiers tantôt mentent, tantôt disent la vérité. Toutes ces personnes sont bien sûr indiscernables. On rencontre deux personnes, A et B.

- A dit : "Je suis un infirmier." (P_1)
- B déclare : "Nous sommes deux malades." (P_2)
- A dit : "Si je suis un malade, alors B est un infirmier." (P_3)
- B ajoute : "Si je suis un malade, alors A est un infirmier." (P_4)

Le but de l'exercice est de découvrir qui sont A et B. Pour cela on introduit 3 valeurs : d pour représenter un docteur, i pour un infirmier et m pour un malade. Par exemple, la phrase P_1 dite par A peut se traduire par la formule $A = i$.

Questions.

1. Traduire de la même manière les trois autres phrases échangées P_2, P_3, P_4 en des formules logiques qui pourront utiliser les symboles A, B, m, i, d, l'égalité et les connecteurs propositionels.
2. A et B pouvant chacun prendre l'une des valeurs d, i ou m, combien y-a-t-il de possibilités différentes à considérer (en regardant tous les cas possibles sans tenir compte des phrases échangées) ?
3. Faire un tableau qui pour chaque valeur possible de A et de B donne la valeur de vérité des formules P_1, P_2, P_3 et P_4
4. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu être dite. Par exemple si A est un docteur, il dit la vérité et donc il ne peut pas dire la phrase P_1 qui serait un mensonge.
5. A-t-on assez d'information pour retrouver le statut de A et de B ? justifier votre réponse.

Correction :

1. $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} A = I$, $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} (A = M) \wedge (B = M)$, $P_3 \stackrel{\text{def}}{=} (A = M) \Rightarrow (B = I)$, $P_4 \stackrel{\text{def}}{=} (B = M) \Rightarrow (A = I)$,
2. *Il y a* $3 \times 3 = 9$ *possibilités*
3. *cf tableau ci-dessous (colonnes* P_1, P_2, P_3, P_4*)*
4. *un malade ne peut pas dire une phrase vrai et un docteur ne peut pas dire une phrase fausse (un infirmier peut dire n'importe quoi). Certaines des situations décrites dans le tableau ne peuvent donc pas se produire.*

   On met dans la colonne D_i *le signe* X *si la phrase* P_i *n'a pas pu être dite.*

A	B	P_1	P_2	P_3	P_4	D_1	D_2	D_3	D_4
I	I	V	F	V	V				
I	M	V	F	V	V				X
I	D	V	F	V	V		X		
M	I	F	F	V	V			X	
M	M	F	V	F	F		X		
M	D	F	F	F	F		X		X
D	I	F	F	V	V	X			
D	M	F	F	V	F	X			
D	D	F	F	V	V	X	X		

5. *La seule situation pour laquelle les 4 phrases ont pu être échangées est le cas où A et B sont des infirmiers.*

Exercice 2 *Ensembles finis, 3 points*

1. Quel est le cardinal de l'ensemble B_n des mots binaires (formés uniquement de 0 et de 1) de longueur n ?
2. On suppose que l'on a une application `zip` de compression de données de B_n dans B_p.
   (a) Ecrire comme une formule logique la propriété "`zip` est injective".
   (b) Que se passe-t-il si la fonction `zip` n'est pas injective ? peut-on l'utiliser pour compresser des données ?
   (c) On suppose que la fonction `zip` est injective, qu'en déduit-on sur n et p ?
   (d) Quelle conséquence cela a-t-il sur les applications de compression de données ?

Correction :

1. $|B_n| = 2^n$

2. (a) *"**zip** est injective" s'écrit :* $\forall x\, y \in B_n, \texttt{zip}(x) = \texttt{zip}(y) \Rightarrow x = y$

(b) si la fonction n'est pas injective, deux entrées différentes vont se compresser vers le même résultat (et donc on ne pourra pas décompresser et retrouver la valeur initiale).

(c) si la fonction est injective, il y a plus d'éléments dans l'ensemble d'arrivée que dans l'ensemble de départ et donc $n \leq p$.

(d) il n'est pas possible de construire une fonction de compression qui réduit strictement la taille des données d'entrée.

Exercice 3 *Modélisation, 4 points*

On se donne un langage avec une constante `moi` qui désigne la personne qui parle, un prédicat ternaire `joue-avec`, quatre prédicats binaires `ami`, `travaille`, $=$ et `après`.

- $\texttt{joue-avec}(t, x, y)$ représente le fait que x et y jouent ensemble au temps t ;
- $\texttt{ami}(x, y)$ représente le fait que x et y sont amis ;
- $\texttt{travaille}(t, x)$ représente le fait que x travaille au temps t ;
- $x = y$ représente le fait que x et y sont égaux ;
- $\texttt{après}(t, u)$ représente le fait que le temps t est après le temps u.

1. Traduire en (bon) français, les formules logiques suivantes :
   (a) $\forall t, \texttt{travaille}(t, \texttt{moi}) \Rightarrow \neg\exists y, \texttt{joue-avec}(t, \texttt{moi}, y)$
   (b) $\forall t, \texttt{travaille}(t, \texttt{moi}) \Rightarrow \exists u\, y, \texttt{après}(u, t) \land \texttt{joue-avec}(u, \texttt{moi}, y)$
   (c) $\exists x, \forall t, \texttt{travaille}(t, x)$
   (d) $\forall t, \exists x, \texttt{travaille}(t, x)$
2. Donner des formules logiques correspondant aux phrases suivantes :
   (a) Je ne joue qu'avec mes amis.
   (b) Je ne joue pas avec plus de deux personnes à la fois.
3. On s'intéresse maintenant à une relation binaire $\texttt{joue}(t, x)$ qui représente le fait que x joue au temps t (sans préciser avec qui).
   (a) Définir le prédicat $\texttt{joue}(t, x)$ à l'aide d'une formule qui utilise la relation `joue-avec`.
   (b) Utiliser le prédicat `joue` pour traduire en formules logiques les phrases suivantes :
      i. On ne peut pas jouer et travailler en même temps.

ii. Après avoir joué, je me mets toujours à travailler.

Correction :

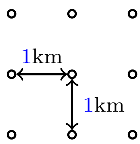
1. *(a) Quand je travaille, je ne joue pas.*
   (b) Je joue toujours après avoir travaillé.
   (c) Il y a quelqu'un qui travaille tout le temps.
   (d) Il y a toujours au moins une personne qui travaille.
2. - $\forall t\, x, \texttt{joue-avec}(t, \texttt{moi}, x) \Rightarrow \texttt{ami}(\texttt{moi}, x)$
   - $\forall t\, x\, y\, z, \texttt{joue-avec}(t, \texttt{moi}, x) \wedge \texttt{joue-avec}(t, \texttt{moi}, y) \wedge \texttt{joue-avec}(t, \texttt{moi}, z)$
     $\Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z$
3. (a) $\texttt{joue}(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists y, \texttt{joue-avec}(t, x, y)$
   (b) *i.* $\forall t\, x, \texttt{travaille}(t, x) \Rightarrow \neg\texttt{joue}(t, x)$
   ii. $\forall t, \texttt{joue}(t, \texttt{moi}) \Rightarrow \exists u\ \texttt{après}(u, t) \wedge \texttt{travaille}(u, \texttt{moi})$

Exercice 4 *Graphes (6 points)* Les deux questions sont indépendantes.
On considère des graphes non-orientés.

1. Les communications sans-fils posent des problèmes d'interférence. Pour éviter ce problème, deux émetteurs qui sont actifs dans la même zone géographique doivent utiliser des fréquences différentes. On se donne un ensemble d'émetteurs E, on connait la distance $d(e_1, e_2)$ entre deux émetteurs e_1 et e_2 et on sait que si cette distance est supérieure à N alors les deux émetteurs ne seront pas actifs sur la même zone. On veut attribuer une fréquence à chaque émetteur, en utilisant le moins possible de fréquences mais sans provoquer d'interférence.

   (a) Montrer qu'attribuer les fréquences se ramène à un problème de coloration de graphe : on précisera la définition du graphes (sommets, arêtes) et la signification des couleurs.

   (b) On a neuf émetteurs disposés en carré sur une grille. La distance entre deux émetteurs consécutifs horizontalement ou verticalement est de $1km$.



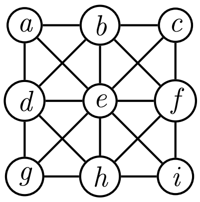
   Les émetteurs ont une portée maximale de $900m$ donc deux émetteurs distants de plus de $1,8km$ ne sont pas actifs au même endroit.

   i. Dessiner le graphe permettant l'attribution des fréquences sans interférence.
   ii. Quel est le degré maximal d'un sommet de ce graphe ?
   iii. Quel nombre minimal de couleurs est nécessaire pour le colorier ?
   iv. Proposer un coloriage qui utilise le nombre minimal de couleurs (on utilisera des entiers pour représenter les couleurs).

Correction :

(a) Les sommets du graphe sont les émetteurs et on a une arête de a à b si et seulement si la distance entre les deux émetteurs est inférieure au seuil d'interférence, c'est-à-dire $d(a, b) \leq N$. Chaque couleur correspondra à une fréquence différente. On aura bien que deux émetteurs trop proches n'émettront pas sur la même fréquence.

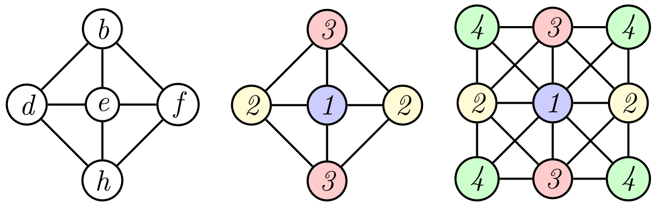
(b) i. On a une interférence avec les voisins les plus proches sur une ligne de la grille mais aussi avec le plus proche voisin en diagonale puisque la diagonale à une taille $\sqrt{2} < 1,8$.



ii. *Le degré maximal est le sommet central* e *de degré* 8.

iii. *On a des sous-graphes dans chaque carré qui sont des cliques à 4 sommets qui ont besoin d'au moins 4 couleurs pour être coloriés.*

iv. *Pour colorier le graphe on peut procéder comme vu en cours en essayqnt de simplifier le graphe en retirant les sommets de degré inférieurs ou égal à* 3. *Les sommets a, c, g et i sont dans ce cas et peuvent donc être coloriés en dernier. Le graphe simplifié a la forme ci-dessous et peut se colorier facilement (avec 3 couleurs), en commençant par le sommet* e. *On complète ensuite en ajoutant les extrémités à l'aide d'une quatrième couleur.*



2. On va étudier les propriétés pour qu'un graphe puisse être colorié avec deux couleurs.
   (a) Montrer que si un graphe est colorié avec deux couleurs et si on a un chemin entre deux sommets a et b alors soit ce chemin est de longueur paire et les couleurs de a et b sont les mêmes, soit le chemin est de longueur impaire et les deux couleurs sont différentes.
   (b) En déduire qu'on ne peut pas colorier un graphe qui contient un cycle de longueur impaire avec seulement deux couleurs.
   (c) On veut montrer qu'un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur impaire peut être colorié avec deux couleurs. On procède par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.
   - Montrer le résultat pour tout graphe avec un seul sommet.
   - On suppose le résultat vrai pour tout graphe avec n sommets et sans cycle de longueur impaire. On se donne un graphe G sans cycle de longueur impaire avec $n+1$ sommets ; on choisit un sommet a et on considère le graphe G' qui est le même que G mais sans le sommet a et sans les arêtes de G qui avaient a comme extrémité.

     i. Justifier qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au graphe G'.
     On colorie donc le graphe G' avec deux couleurs.

     ii. Si on est dans le cas où tous les sommets de G' sont connectés, montrer que tous les sommets qui étaient connectés à a ont la même couleur. En déduire un coloriage pour le graphe G.

     iii. Ce résultat est-il encore vrai si G' a deux composantes connexes (donner un exemple) ? Comment peut-on modifier le coloriage de G' pour pouvoir colorier G avec seulement deux couleurs ?

Correction :

(a) *On peut raisonner par récurrence sur la longueur du chemin. Si le chemin est de longueur* 0 *alors* $a = b$ *et ils sont forcément de la même couleur. Si la propriété est vrai pour un chemin de longueur* n, *montrons qu'elle est vraie pour un chemin de longueur* $n+1$. *On a un chemin de longueur* $n+1$ *de* a *à* b *qui se décompose en un chemin de longueur* n *de* a *à* c *et une arête de* c *à* b. *La couleur de* b *est différente de la couleur* c.

- *Si $n+1$ est pair alors n est impair et par hypothèse de récurrence la couleur de a est différente de la couleur de c et est donc égale à la couleur de b (car il n'y a que deux couleurs).*
- *Si $n+1$ est impair alors n est pair et par hypothèse de récurrence la couleur de a est égale à la couleur de c et est donc différente de la couleur de b.*

Dans les deux cas la propriétés à montrer est vraie pour les che,ins de longueur $n+1$. C'est donc vrai pour tous les chemins.

(b) *S'il y a un cycle de longueur n alors il y a un chemin de a à a de longueur n et comme les deux extrémités ont la même couleur (c'est le même point), on a par la question précédente que n est pair. On en déduit qu'un graphe coloriable avec deux couleurs n'a pas de cycle de longueur impaire.*

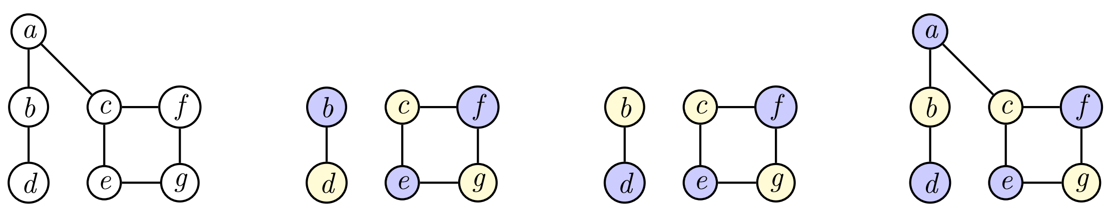
(c) *Si un graphe a un seul sommet a, les seuls arètes possibles sont des boucles sur a, mais comme une boucle est un cycle de longueur impaire, il n'y en a pas. Le graphe avec un seul sommet et pas d'arêtes peut être colorié avec une seule couleur.*

Soit un graphe G qui a $n+1$ arètes et pas de cycle de longueur impaire, un sommet a et le graphe G' obtenu en supprimant a de G et toutes les arêtes d'extrémité a.

i. *Le graphe G' a n sommets et n'a pas de cycle de longueur impair (sinon il y aurait également un tel cycle dans G). On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et le colorier avec deux couleurs.*

ii. *Soient deux sommets de G' b et c qui étaient connectés à a. Si b et c sont connectés dans G' alors le chemin p entre b et c est de longueur paire car on a un cycle dans G : $ab.p.ca$ qui serait sinon de longueur impaire. On a donc que la couleur de b est égale à la couleur de c. Si tous les voisins de a sont de la même couleur alors on peut choisir la couleur de a comme étant l'autre couleur.*

iii. *La preuve précédente ne fonctionne pas si le graphe G' a plusieurs composantes connexes, par exemple en partant du graphe G ci-dessous on obtient un graphe G' avec deux composantes et le coloriage obtenu par hypothèse de récurrence peut parfaitement donner des couleurs différentes pour b et c, ce qui ne permet pas de rajouter a avec seulenebt deux couleurs. Pour résoudre ce problème, on remarque que si un graphe est colorié avec deux couleurs alors on obtient un coloriage valide en inversant les couleurs. On choisit donc une couleur i. Dans une composante connexe, tous les sommets reliés à a ont la même couleur (d'après le point précédent), si cette couleur n'est pas la couleur choisie i alors on inverse les couleurs de la composante connexe de façon à donner la couleur i à tous les sommets liés à a dans G. On fait cela dans chaque composante connexe de G' reliée à a. On est donc ramené au cas où tous les voisins de a ont la même couleur et on peut donc ajouter et colorier a en lui donnant l'autre couleur.*



Exercice 5 *Récurrence et Règles d'inférence, 4 points*

On se donne le système d'inférence suivant pour définir une relation $S(n,m,p)$ qui relie 2 entiers naturels n,m non nuls et un entier naturel p. Dans les règles suivantes, n et m sont non nuls.

$$(a)\frac{}{S(n,1,1)} \qquad (b)\frac{n<m}{S(n,m,0)} \qquad (c)\frac{S(n,m,p) \qquad S(n,m+1,q)}{S(n+1,m+1,(m+1)(p+q))}$$

1. Trouver une valeur de n pour laquelle on a $S(3,3,n)$ et donner la dérivation correspondante.
2. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $S(n,n,n!)$
   ($n!$ désigne la fonction factorielle définie par $n \times (n-1) \dots 2 \times 1$).
3. Énoncer le principe de récurrence associé à la définition de S.
4. Utiliser ce principe pour montrer que si $S(n,m,p)$ est vrai alors p représente le nombre de manières de distribuer n objets à m personnes en assurant que toute personne a au moins un objet. On pourra noté ce nombre $s(n,m)$.
   Indication pour l'étape de récurrence : pour distribuer n objets à m personnes, on prend le premier objet, il y a m personnes différentes à qui on peut le donner, on en choisit une (notée x). On considère les $n-1$ objets restants, on peut au choix les distribuer aux m personnes en en donnant au moins un à chacun (donc x en aura au moins 2) ou on peut les distribuer aux $m-1$ personnes autres que x. Cette analyse nous permet de relier $s(n,m)$ à m, $s(n-1,m)$ et $s(n-1,m-1)$ suivant une relation que l'on pourra expliciter.

Correction :

1.

$$c\,\dfrac{c\,\dfrac{b\,\dfrac{}{S(1,1,1)} \qquad b\,\dfrac{}{S(1,2,0)}}{S(2,2,2)} \qquad b\,\dfrac{}{S(2,3,0)}}{S(3,3,6)}$$

2. On montre par récurrence que $\forall n \geq 1, S(n,n,n!)$ soit la propriété $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} S(n,n,n!)$

- *pour $n=1$ on a $P(1) \Leftrightarrow S(1,1,1)$ qui est vrai par la règle a*
- *On suppose la propriété $S(n,n,n!)$ vrai pour n et on veut montrer $S(n+1,n+1,(n+1)!)$*
  On construit la dérivation

$$c\,\dfrac{\dfrac{\textit{hyp. récurrence}}{S(n,n,n!)} \qquad b\,\dfrac{}{S(n,n+1,0)}}{S((n+1),(n+1),(n+1)n!)}$$

  d'où le résultat

3. Soit $P(n,m,p)$ une propriété. Le principe de récurrence sur la relation S s'énonce ainsi.
Si

(a) pour tout n, $P(n,1,1)$

(b) pour tout n,m, si $n < m$ alors $P(n,m,0)$

(c) pour tout n,m,p,q, si $P(n,m,p)$ et $P(n,m+1,q)$ alors $P(n+1,m+1,(m+1)(p+q))$

alors $\forall n\, m\, p, S(n,m,p) \Rightarrow P(n,m,p)$

4. On introduit $s(n,m)$ le nombre de manières de distribuer n objets à m personnes en en donnant au moins un à chacun.

- *Il y a une seule manière de dsitribuer n objets à une seule personne (on lui donne tous les objets aue l'on a) on a donc $s(n,1)=1$*
- *Si on a strictement moins d'objets que de personnes alors on ne peut pas les distribuer sans qu'une personne au moins se retrouve sans objet donc si $n < m$ alors $s(n,m)=0$*
- *on se place maintenant dans le cas où n et m sont strictement plus grands que 1 ; On choisit le premier objet à distribuer. Il y a m personnes différentes à qui les donner. On l'attribue à une personne notée x. Pour les $n-1$ objets qui restent, il faut en donner au moins un à chacune des personnes autres que x. Soit on en donne aucun à x et il y a $s(n-1,m-1)$ manière de faire soit on les distribue en en donnant au moins un à chacun et il y a $s(n-1,m)$ manière de faire. On trouve donc que $s(n,m) = m(s(n-1,m-1)+s(n-1,m))$.*
  On montre ensuite simplement la propriété : $\forall n\, m\, p, S(n,m,p) \Rightarrow p = s(n,m)$ par récurrence sur la définition de S en prenant $P(n,m,p) \stackrel{\text{def}}{=} p = s(n,m)$. Il faut montrer

(a) *pour tout* n*,* $P(n, 1, 1)$*, c'est-à-dire* $s(n, 1) = 1$ *que l'on a déjà établi*

(b) *pour tout* n, m*, si* $n < m$ *alors* $P(n, m, 0)$ *c'est-à-dire* $s(n, m) = 0$ *que l'on a déjà établi*

(c) *pour tout* n, m, p, q*, si* $p = s(n, m)$ *et* $q = s(n, m+1)$ *alors* $P(n+1, m+1, (m+1)(p+q))$ *c'est-à-dire* $(m + 1)(p + q) = s(n + 1, m + 1)$*. D'après notre analyse précédente, on a* $s(n+1, m+1) = (m+1)(s(n, m) + s(n, m+1))$ *et en appliquant les deux hypothèses de récurrence, on obtient le résultat attendu.*