Licence STS, semestre 4 — 2015–16

Mathématiques pour l'Informatique 2 — 3 février 2016

`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo2`

TD1 - Rappels logique

Exercice 1 *Énigme logique*

Un garçon (Bob) et deux filles (Alice et Carole) jouent dans le salon et ont cassé un vase. Leurs parents les interrogent pour savoir qui est coupable d'avoir touché le vase.

- Alice dit : « Carole a touché le vase et Bob n'a rien fait ».
- Bob dit : « Je suis innocent et l'une des filles a touché le vase ».
- Carole dit : « Si Alice a touché le vase alors Bob aussi ».

Les parents cherchent à comprendre ce qui s'est réellement passé. Pour résoudre le problème on introduit trois variables propositionnelles A pour « Alice a touché le vase », B pour « Bob a touché le vase » et C pour « Carole a touché le vase ».

1. Traduire les trois réponses des enfants en formules propositionnelles qui utilisent les variables A, B et C et les connecteurs logiques.
2. En considérant tous les cas possibles pour les variables A, B et C donner (dans un même tableau) les valeurs de vérité des trois formules précédentes.
3. À supposer que chaque enfant dise la vérité, peut-on déduire de la table de vérité précédente qui est coupable d'avoir touché le vase ? (Il peut y avoir plusieurs coupables.)
4. On suppose maintenant qu'un seul enfant ment, peut-on en déduire ce qui s'est passé et qui a menti ?

Exercice 2 *Formaliser*

On se place dans un langage avec les prédicats suivants qui parlent de personnes et d'aliments :

$\texttt{aime}(x, y)$	x aime l'aliment y
$\texttt{mange}(x, y)$	x mange l'aliment y
$x = y$	x et y sont égaux

ainsi qu'une constante `moi` qui représente la personne qui parle et une constante `céleri` représentant un aliment.

1. Traduire les formules suivantes en langage naturel
   (a) $\forall x, \exists y, \texttt{mange}(x, y)$
   (b) $\exists y, \forall x, \texttt{mange}(x, y)$
   (c) $\exists x, \forall y, \texttt{mange}(x, y)$
   (d) $\forall x\, y\, z, \texttt{aime}(x, y) \wedge \texttt{aime}(x, z) \Rightarrow (y = z)$
2. Exprimer par des formules logiques sur le langage précédent les propositions suivantes
   (a) J'aime tout ce que je mange
   (b) Je mange tout ce que j'aime
   (c) Je n'aime pas le céleri, mais j'en mange
   (d) Si j'aime le céleri, alors je mange de tout
   (e) Je ne mange que du céleri
3. Les formules 2a et 2b sont-elles équivalentes ?
4. On suppose la formule 2c vraie, peut-on en déduire que 2d est vraie ?

Exercice 3 *Récurrence simple.*

Rédigez une récurrence classique pour montrer la propriété suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 4 *Cardinal*

1. **Rappels.** Soit A un ensemble de cardinal n et B un ensemble de cardinal m
   (a) Donner le cardinal des ensembles suivants : $A \times B$ (ensemble des couples formés d'un élément de A et d'un élément de B), $A \to B$ (ensemble des applications de A dans B), $\wp(A)$ (ensemble des parties de A), A^k (ensemble des suites de longueur k d'éléments de A)
   (b) Dire à quelle condition sur n et m les propriétés suivantes sont vérifiées
      i. il y a des fonctions injectives de A dans B
      ii. il y a des fonctions surjectives de A dans B
      iii. il y a des fonctions bijectives de A dans B
   (c) Combien y a t-il d'application de A dans B injectives ? bijectives ?
2. Jean a élaboré une fonction z de compression de données qui permet de traiter des suites finies de 0 et de 1.
   (a) Quelle propriété doit avoir cette fonction pour que l'on puisse décompresser les données ?
   (b) Jean affirme à son acheteur que sa fonction a de très bonnes performances et renvoie toujours une suite de longueur plus petite.
      i. est-ce possible ?
      ii. la fonction de Jean est-elle vraiment efficace ?