TD3 - Théorie des graphes, coloriage, chemins

Exercice 1 *Coloration*

On se donne un ensemble E d'étudiants et un ensemble C de cours ainsi qu'une relation X telle que $X(e,c)$ est vrai si et seulement si l'étudiant e doit passer l'examen du cours c.

Chaque épreuve se déroule sur une demi-journée. Le responsable de cours se demande quel nombre minimum de demi-journées il doit réserver pour les examens afin que chaque étudiant puisse passer tous les examens auquel il est inscrit sans conflit d'emploi du temps.

1. Montrer que ce problème se ramène à un problème de coloriage de graphe. On explicitera l'ensemble des sommets, l'ensemble des arêtes et la signification du coloriage.
2. On suppose qu'il y a deux étudiants e_1, e_2 et quatre cours c_1, c_2, c_3, c_4 avec les contraintes suivantes : $X(e_1, c_1), X(e_1, c_2), X(e_1, c_3), X(e_2, c_3), X(e_2, c_4)$, construire le graphe associé et déterminer le nombre de demi-journées d'examens nécessaires.
3. On suppose qu'il y a 5 étudiants et 5 cours, que chaque cours est suivi par au moins un étudiant et que chaque étudiant suit exactement 2 cours, trouver une configuration dans laquelle trois demi-journées sont nécessaires.

Exercice 2 *Clique*

Un clique est un graphe dont tous les sommets différents sont reliés par une seule arête. On note K_n la clique qui a n sommets.

- Dessiner les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.
- Combien y a-t-il d'arêtes dans K_n ?
- Combien de couleurs sont-elles nécessaires pour colorier K_n ?
- Montrer que le graphe K_4 est planaire (il peut être dessiné sans que les arêtes ne se croisent).
- A votre avis, le graphe K_5 est-il planaire ?

Exercice 3 *Composantes connexes*

La composante connexe d'un sommet a dans un graphe non orienté G est définie comme l'ensemble des points b tels qu'il existe un chemin (éventuellement vide) de a à b. Elle est notée $CC_G(a)$.

1. Montrer que l'ensemble des composantes connexes forme une partition de l'ensemble des sommets :
   - chaque composante est non vide
   - tout sommet appartient à une composante
   - deux composantes sont soit disjointes, soit égales
2. Quel est le nombre maximal de composantes connexes dans un graphe en fonction du nombre de sommets, le nombre minimal ?
3. On suppose que le graphe G a k composantes connexes. Soient deux sommets a et b de G et le graphe G' qui est le même que G avec une arête de plus qui a pour extrémités $\{a, b\}$. Montrer que soit G' contient un cycle, soit G' a $k-1$ composantes connexes.
4. En déduire que si un graphe a n sommets et ne contient pas de cycle alors il a au plus $n-1$ arêtes.

Exercice 4 *Coloriage d'arêtes*

On cherche à planifier les matchs d'un tournoi auquel participent n joueurs. On construit un graphe dont les sommets sont les joueurs, chaque match est représenté par une arête entre les deux joueurs qu'il oppose.

- Planifier les matchs dans le temps se ramène à associer une couleur à chaque arête. Exprimer quelle condition doit vérifier ce coloriage pour que les matchs puissent se jouer sans conflit.

- Donnez une borne inférieure sur le nombre de couleurs nécessaires en fonction des caractéristiques du graphe.
- On se place maintenant dans le cas où chaque joueur doit rencontrer chaque autre joueur exactement une fois.
  — Reconnaissez-vous le graphe correspondant ? Combien a-t-il d'arêtes ?
  — Quel est le nombre maximal de matchs qui peuvent avoir lieu en même temps ?
  — Proposez un coloriage qui convient pour $n = 4$ et $n = 5$.

Exercice 5 *Recherche de plus courts chemins*

On se donne un graphe simple (pas de boucle ni d'arête multiple) et tel que à chaque arête est associée une valeur qui est un entier naturel.

Le poids d'un chemin est la somme des valeurs des arêtes qui le composent.

Le but est de trouver si deux points sont reliés par un chemin et de calculer le poids minimal d'un tel chemin.

1. Adapter l'algorithme de Warshall vu en cours afin d'obtenir ce résultat.
2. Peut-on résoudre le même problème s'il y a des boucles et plusieurs arêtes entre les sommets ?