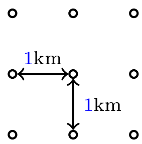
Licence STS, semestre 4 — 2015–16
Mathématiques pour l'Informatique 2 — 4 février 2016
http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo2

TD4 - Graphes, Récurrence

Exercice 1 *Graphes, partiel 2015*

Les communications sans-fils posent des problèmes d'interférence. Pour éviter ce problème, deux émetteurs qui sont actifs dans la même zone géographique doivent utiliser des fréquences différentes. On se donne un ensemble d'émetteurs E, on connait la distance $d(e_1, e_2)$ entre deux émetteurs e_1 et e_2 et on sait que si cette distance est supérieure à N alors les deux émetteurs ne seront pas actifs sur la même zone. On veut attribuer une fréquence à chaque émetteur, en utilisant le moins possible de fréquences mais sans provoquer d'interférence.

1. Montrer qu'attribuer les fréquences se ramène à un problème de coloration de graphe : on précisera la définition du graphes (sommets, arêtes) et la signification des couleurs.
2. On a neuf émetteurs disposés en carré sur une grille. La distance entre deux émetteurs consécutifs horizontalement ou verticalement est de $1km$.



Les émetteurs ont une portée maximale de $900m$ donc deux émetteurs distants de plus de $1,8km$ ne sont pas actifs au même endroit.

(a) Dessiner le graphe permettant l'attribution des fréquences sans interférence.

(b) Quel est le degré maximal d'un sommet de ce graphe ?

(c) Quel nombre minimal de couleurs est nécessaire pour le colorier ?

(d) Proposer un coloriage qui utilise le nombre minimal de couleurs (on utilisera des entiers pour représenter les couleurs).

Exercice 2 *Graphes, partiel 2015*

On étudie à quelles conditions un graphe non-orienté peut être colorié avec deux couleurs.

1. Montrer que si un graphe est colorié avec deux couleurs et si on a un chemin entre deux sommets a et b alors soit ce chemin est de longueur paire et les couleurs de a et b sont les mêmes, soit le chemin est de longueur impaire et les deux couleurs sont différentes.
2. En déduire qu'on ne peut pas colorier un graphe qui contient un cycle de longueur impaire avec seulement deux couleurs.
3. On veut montrer qu'un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur impaire peut être colorié avec deux couleurs. On procède par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.
   - Montrer le résultat pour tout graphe avec un seul sommet.
   - On suppose le résultat vrai pour tout graphe avec n sommets et sans cycle de longueur impaire. On se donne un graphe G sans cycle de longueur impaire avec $n + 1$ sommets ; on choisit un sommet a et on considère le graphe G' qui est le même que G mais sans le sommet a et sans les arêtes de G qui avaient a comme extrémité.

   (a) Justifier qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au graphe G'.
   On colorie donc le graphe G' avec deux couleurs.

   (b) Si on est dans le cas où tous les sommets de G' sont connectés, montrer que tous les sommets qui étaient connectés à a ont la même couleur. En déduire un coloriage pour le graphe G.

   (c) Ce résultat est-il encore vrai si G' a deux composantes connexes (donner un exemple) ? Comment peut-on modifier le coloriage de G' pour pouvoir colorier G avec seulement deux couleurs ?

Exercice 3 *Parcours de graphe*

On dispose pour chaque sommet du graphe de l'ensemble des sommets auquel il est connecté (on parle de listes d'adjacences). Soit un sommet a, on souhaite identifier tous les sommets qui sont dans la composante connexe de a.

1. proposer une méthode pour calculer cette composante connexe ;
2. évaluer le nombre d'opérations nécessaires en supposant que le graphe a n sommets.

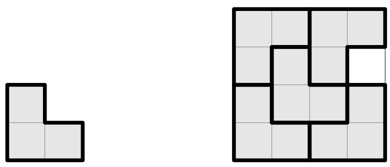
Exercice 4 *Circuit Hamiltonien*

Un circuit Hamiltonien est un circuit qui passe une unique fois par chaque sommet. L'hypercube de dimension n a pour sommets des mots binaires de longueur n et une arête entre deux sommets lorsque ceux-ci diffèrent uniquement d'une lettre.

1. Construire un circuit hamiltonien pour l'hypercube de dimension 2
2. On suppose que l'on connait un circuit hamiltonien dans l'hypercube de dimension n, montrer comment en déduire un circuit hamiltonien pour l'hypercube de dimension $n+1$.
3. En déduire des parcours des hypercubes de dimension 3 et 4.

Exercice 5 *Récurrence, examen 2011-12*

Un triomino est une pièce formée de trois cases disposées en angle (voir figure 1(a)). On considère la propriété suivante : si on retire une case quelconque à un quadrillage de côté 2^n, $n \geq 1$, il est toujours possible de paver le reste du quadrillage avec des triominos. Montrer cette propriété par récurrence sur n.



(a) (b)

FIGURE 1 – (a) Un triomino. (b) Pavage par des triominos d'un quadrillage de côté 4 privé d'une case.

Exercice 6 *Récurrence, partiel 2013-14*

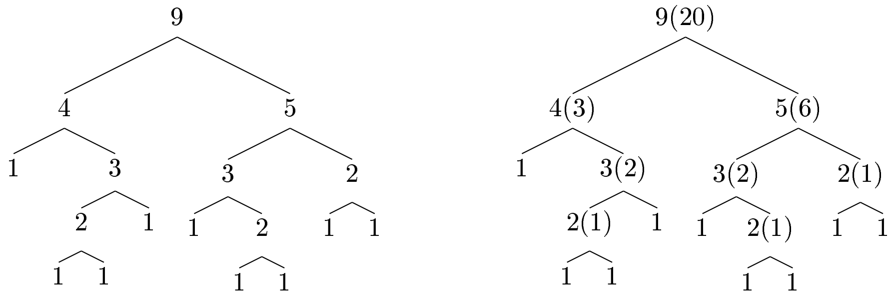
On considère le jeu suivant : on part d'un entier $n \geq 2$, on le décompose en une somme $p+q$ avec $p, q \geq 1$, puis tant que p ou q est strictement plus grand que 1 on recommence en le décomposant à nouveau en une somme de deux nombres plus petits.

Par exemple, en partant de $n = 9$ on peut faire la décomposition suivante : $9 = 4+5 = (1+3)+(3+2) = (1+(2+1))+((1+2)+(1+1)) = (1+((1+1)+1))+((1+(1+1))+(1+1))$

On représente la décomposition sous forme d'arbre : la transformation de n en $p+q$ devient le nœud $\boxed{\begin{array}{c} \text{n} \\ \frown \\ \text{p} \quad \text{q} \end{array}}$.

On fait ensuite la somme de tous les produits $p \times q$ ainsi créés. Pour cela, on commence par ajouter les produits dans les arbres entre parenthèses, en écrivant $\boxed{\begin{array}{c} n(p\times q) \\ \frown \\ \text{p} \quad \text{q} \end{array}}$.

Dans l'exemple de décomposition de 9, on obtient les arbres suivants :



Lorsque l'on fait la somme des produits ainsi obtenus $20+3+6+2+2+1+1+1$, on obtient le nombre 36.

1. On se donne une autre décomposition de l'entier 9 :

   $$9 = 7+2 = (4+3)+(1+1) = ((2+2)+(2+1))+(1+1) = (((1+1)+(1+1+)+((1+1)+1))+(1+1)$$

   Dessiner l'arbre de décomposition, annoter les nœuds par les produits et montrer que la somme de ces produits est aussi égale 36.

2. On cherche maintenant à montrer que cette somme ne dépend que de n et pas de la décomposition. On appelle $s(n)$ la somme des produits d'une décomposition de n.

   (a) Si n est décomposé en $p+q$, exprimer la valeur de $s(n)$ en fonction des valeurs de $s(p)$ $s(q)$ et du produit $p \times q$.

   (b) Montrer par une récurrence généralisée sur n que pour tout $n \geq 2$ on a

   $$s(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

   Rappel : *la récurrence généralisée consiste lorsque l'on montre l'étape d'hérédité $P(n+1)$ pour n quelconque, à supposer non seulement que $P(n)$ est vrai mais plus généralement que $P(k)$ est vrai pour tout $k \leq n$.*

3. Un magicien demande à une personne dans la salle de choisir sans le dévoiler un nombre n, d'appliquer une décomposition suivant le principe précédent et de lui donner le résultat de la somme des produits obtenus, la réponse est 78. Le magicien "devine" alors le nombre n de départ. Quel est ce nombre ?