TD5 - Définition par clôture, définition récursive

Exercice 1 *Définitions par clôture*

Soit P un ensemble de personnes et une relation $\mathsf{parent} \subseteq P \times P$ telle que $\mathsf{parent}(x, y)$ est vrai lorsque y est l'enfant de x.

1. Écrire à l'aide des connecteurs logiques et de la relation parent une propriété qui exprime que toute personne de P a exactement deux parents.
2. Définir par des règles d'inférence la relation ascendant à partir de la relation parent.
3. Définir la relation fratrie (être dans la même fratrie) à partir de la relation parent. On pourra utiliser une formule logique ou des règles d'inférence.
4. Définir la relation cousin à partir des relations parent et fratrie.

Exercice 2 *Récurrence sur les entiers*

On définit un prédicat $\mathcal{N}_2$ sur les entiers naturels par les règles suivantes.

$$\frac{}{\mathcal{N}_2(0)} \qquad \frac{}{\mathcal{N}_2(1)} \qquad \frac{\mathcal{N}_2(x)}{\mathcal{N}_2(x+2)}$$

1. Donner les arbres de preuve correspondant aux dérivations de $\mathcal{N}_2(4)$ et $\mathcal{N}_2(5)$.
2. Prouver que tous les entiers naturels vérifient le prédicat $\mathcal{N}_2$, c'est-à-dire la formule $\forall x \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_2(x)$. (Idée : généraliser la propriété en montrant par récurrence $\forall x \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_2(x) \wedge \mathcal{N}_2(x+1)$).
3. Donner le schéma de preuve par induction associé à cette définition.
4. On définit une fonction $p \in \mathbb{N} \to \mathtt{bool}$ qui vérifie :

$$p(0) = \mathtt{true} \qquad p(1) = \mathtt{false} \qquad \forall x \in \mathbb{N}, p(x+2) = p(x)$$

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, si $p(x) = \mathtt{true}$ alors x est un entier pair.

Exercice 3 *Définition par clôture (partiel 2010)*

Dans un réseau social, deux personnes peuvent décider d'être des « amis ». On modélise cela par un ensemble X d'utilisateurs du réseau et une relation binaire `ami` sur X, telle que $\mathtt{ami}(x, y)$ est vrai si x et y sont amis.

On souhaite définir la relation « être lié à » (notée `lié`) telle que « x est lié à y » si et seulement si y est un ami de x ou bien si un ami de x est lié à y.

1. Définir la relation `lié` à l'aide d'un système d'inférence.
2. Donner le principe d'induction simple associé à cette définition.
3. Montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $\forall x\, y\, z, \mathtt{ami}(x, z) \Rightarrow \mathtt{lié}(z, y) \Rightarrow \mathtt{lié}(x, y)$
   (b) $\forall x\, y\, z, \mathtt{lié}(x, z) \Rightarrow \mathtt{ami}(z, y) \Rightarrow \mathtt{lié}(x, y)$

   Suivant votre définition de `lié` ces propriétés pourront être des conséquences de la définition ou devront être prouvées par induction.
4. La relation `ami` est symétrique, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x\, y, \mathtt{ami}(x, y) \Rightarrow \mathtt{ami}(y, x)$$

   Montrer à l'aide du principe d'induction que la relation `lié` est aussi symétrique.

Exercice 4 *Règles d'inférence, partiel 2013-14*

On se donne le système d'inférence suivant

$$(a)\frac{}{R(0,1,0)} \qquad (b)\frac{R(x,y,n)}{R(x+y,y+2,n+1)}$$

1. Montrer que l'on a $R(1,3,1)$ et $R(4,5,2)$. Trouver x et y tels que $R(x,y,4)$ et construire l'arbre de dérivation correspondant.
2. Énoncer le principe d'induction associé à la définition de R.
3. Utiliser ce principe pour montrer que pour tout x, y, n, on a $R(x,y,n) \Rightarrow x = n^2 \land y = 2n+1$.
4. On admettra sans le démontrer que pour tout n, il existe un unique x et un unique y tel que $R(x,y,n)$. On note x_n la valeur de x pour laquelle $R(x,y,n)$.

   Montrer que pour tout réel positif a, il existe un unique n tel que $x_n \leq a$, $x_{n+1} > a$, et que n est alors la partie entière de la racine carrée de a (on a ainsi un algorithme pour calculer la racine carrée entière qui n'utilise que des additions).

Exercice 5 Définir successivement par des équations récursives sur n, en utilisant les opérations arithmétiques usuelles (addition, multiplication) les fonctions suivantes :

1. $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$ avec la convention que $0! = 1$
2. k^n
3. ${}^n k = k^{\underbrace{k^{\cdot^{\cdot^{k}}}}^{n \text{ exposants}}}$ (on pourra utiliser la fonction exposant de la question précédente)