Licence STS, semestre 4 — 2015–16
Mathématiques pour l'Informatique 2 — 22 mars 2016
http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo2

TD6 - Définition récursive, mots, arbres binaires

Exercice 1 *Définitions récursives sur* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On se donne les systèmes d'équations suivants :

$$f(0,0) = 1 \qquad \forall n\, m \in \mathbb{N}, f(n+1,m) = 2 \times f(n,m) \qquad \forall n\, m \in \mathbb{N}, f(n,m+1) = 3 \times f(n,m)$$

$$g(0,0) = 1 \qquad \forall nm \in \mathbb{N}, g(n+1,m) = 2 \times g(n,m)^2 \qquad \forall nm \in \mathbb{N}, g(n,m+1) = 3 \times g(n,m)$$

1. - Définir par des règles d'inférence la relation $F(n,m,y)$ correspondant à la relation $f(n,m) = y$.
   - Trouver y tel que $F(1,2,y)$, $F(2,1,y)$ et $F(2,2,y)$.
   - Justifier que les équations pour f définissent une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   - Que calcule cette fonction ?
2. Est-ce que les équations pour g définissent une fonction ?

Exercice 2 *Minimisation.* On se donne un prédicat T sur les entiers naturels et on cherche à justifier l'existence d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = n \quad \text{si } T(n) \qquad f(n) = f(n+1) \quad \text{si } \neg T(n)$$

1. Donner une définition par clôture de la relation $F(n,m)$ correspondant à cette définition récursive (ie $F(n,m) \Leftrightarrow f(n) = m$).
2. Écrire le principe d'induction associé à cette définition par clôture.
3. Montrer par induction sur la relation que si $F(n,m)$ est vérifié alors $n \leq m \wedge T(m)$.
4. Prouver par induction que la relation $F(n,m)$ est fonctionnelle.
5. À quelle condition sur $T(n)$ cette relation décrit-elle une fonction totale ?
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\exists m, F(n,m)) \Leftrightarrow (\exists m, n \leq m \wedge T(m))$. On pourra commencer par prouver $\forall k\, n, T(n+k) \Rightarrow \exists m, F(n,m)$ par récurrence sur l'entier k et utiliser le résultat de la question 3.
7. Comment peut-on caractériser la valeur calculée par $f(n)$?

Exercice 3 *Mots, Exam 2 - 2010*
Soit A l'ensemble formé des 3 caractères `a`, `b` et `c`.

1. Quel est le cardinal des ensemble de mots formés sur l'alphabet A suivants :
   - Ensemble des mots de longueur 0.
   - Ensemble des mots de longueur 1.
   - Ensemble des mots de longueur 3.
2. L'ensemble des mots sur l'alphabet A est-il dénombrable ? si oui indiquer (sans le formaliser) comment construire une énumération des mots de A.
3. On considère le langage L défini par les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{}{\epsilon \in L} \qquad \frac{m_1 \in L \quad m_2 \in L}{\mathtt{a}m_1\mathtt{c}m_2\mathtt{b} \in L} \qquad \frac{m_1 \in L \quad m_2 \in L}{\mathtt{b}m_1\mathtt{c}m_2\mathtt{a} \in L}$$

   (a) Dire si les mots suivants appartiennent au langage L :

   `acb`, `ab`, `bacbca`, `cab`.

   Si oui donner la preuve sous la forme d'une dérivation dont la conclusion est $m \in L$, sinon on pourra juste donner un argument informel.

(b) Donner le principe d'induction associé à la définition du langage L qui permet de montrer $\forall m \in L, P(m)$.

(c) Montrer que tous les mots du langage L ont le même nombre de a, de b et de c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 On se donne un alphabet formé de deux caractères [et], on définit une propriété $D(m)$ par les règles suivantes :

$$\frac{}{D([])} \qquad \frac{D(m)}{D([m])} \qquad \frac{D(m_1) \quad D(m_2)}{D(m_1 m_2)}$$

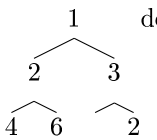
1. Dire si les mots suivants vérifient la condition D :

   [[]]   [[]][][]   [[]   []][[]

2. Donner le schéma de preuve associé à D.
3. Montrer que si $D(m)$ est vérifié alors le nombre de caractères [dans m est égal au nombre de caractères] dans m.
4. Définir sous forme de système d'inférence la propriété $\texttt{prefix}(n, m)$ qui dit que le mot n est un *préfixe* de m, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $m = np$.
5. Montrer que si $D(m)$ est vérifié alors pour tout mot n tel que $\texttt{prefix}(n, m)$, le nombre de caractères [dans n est supérieur ou égal au nombre de caractères] dans n.

Exercice 5 *Arbres binaires, Exam 2 - 2010*
On rappelle que la signature des arbres binaires contenant des entiers est formée d'une constante `leaf` et d'un symbole ternaire `node` d'arité $\texttt{tree} \times \mathbb{N} \times \texttt{tree} \to \texttt{tree}$.

1. Donner les équations pour définir une fonction récursive `infix` qui étant donné un arbre binaire t, renvoie le mot composé des entiers contenus dans l'arbre parcouru de manière infixe : on parcourt d'abord le sous-arbre gauche, puis on ajoute l'entier du nœud puis le mot correspondant au parcours du sous-arbre droit.
   Par exemple, l'arbre

   donnera le mot : 426132.
2. Donner des règles d'inférence pour définir la relation $\texttt{in}(n, t)$ qui représente le fait que l'entier n apparaît dans un nœud de l'arbre t.
3. On s'intéresse aux *arbres binaires de recherche* qui vérifient que dans chaque sous-arbre de la forme $\texttt{node}(l, n, r)$, tous les entiers stockés dans le sous-arbre l sont inférieurs ou égaux à n qui est lui-même inférieur ou égal à tous les entiers stockés dans le sous-arbre r.

   (a) On note $\texttt{elt}(n)$ l'arbre $\texttt{node}(\texttt{leaf}, n, \texttt{leaf})$ qui contient un seul entier n. Est-ce un arbre binaire de recherche ? Les termes suivants sont-ils des arbres binaires de recherche :

   $$\texttt{node}(\texttt{leaf}, 1, \texttt{elt}(2)) \qquad \texttt{node}(\texttt{leaf}, 2, \texttt{elt}(1))$$

   (b) Ecrire un terme correspondant à un arbre binaire de recherche, qui contient les valeurs 1, 2, 3 et 4. Donner la valeur de la fonction `infix` pour cet arbre.

   (c) Donner des règles d'inférence pour définir la relation $\texttt{abr}(t)$ qui représente le fait que l'arbre t est un arbre binaire de recherche.

   (d) Justifier que si l'arbre t est un arbre binaire de recherche alors le mot $\texttt{infix}(t)$ est trié, c'est-à-dire que les entiers apparaissent en ordre croissant.