TD7 - Termes, Equivalences et Ordres

Exercice 1 *Termes, examen 2 2012.*

On cherche à modéliser un morceau de musique simple pour le chant. Une partition est une suite de *notes* de musique et de *silences*. Une note de musique est caractérisée par une *durée* et une *hauteur*. Un silence est caractérisé par une durée.

On choisit de représenter la hauteur d'une note par un entier de 1 à 88. Chaque entier correspond à une touche sur un clavier de piano, numérotées de la note la plus grave (numéro 1) à la note la plus aigüe (numéro 88).

La *durée* représente un nombre de *temps* pendant lequel il faut chanter (ou au contraire se taire pour un silence). Par exemple une croche représente un demi-temps, une note noire représente un temps, une note blanche représente deux temps.... Cette durée sera représentée par un nombre rationnel ($d \in \mathbb{Q}$).

La signature utilisée pour des termes représentant un `chant` se compose de trois symboles :

- `note` : $\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to$ `chant`
- `silence` : $\mathbb{Q} \to$ `chant`
- `seq` : `chant` $\times$ `chant` $\to$ `chant`

Le terme `note`(d, h) représente la note de durée d et de hauteur h ; `silence`(d) représente un silence de durée d ; `seq`(c_1, c_2) représente un morceau où on commence par exécuter les notes et silences de c_1 puis ceux de c_2. L'exemple ci-dessous illustre la représentation d'un morceau.

`seq(seq(silence(0.5),note(0.5,40)),`
`seq(note(1,42),seq(note(0.75,44),note(0.25,45))))`

1. Définir de façon récursive sur les termes qui représentent un chant une fonction *nb_temps* qui calcule un entier représentant la durée totale du champs (le nombre de temps).
2. Définir de façon récursive une fonction *le* qui étant donnés une hauteur de note h et un chant c, renvoie un booléen qui est vrai si la note h est plus basse que toutes les notes du chant c.
3. Définir de façon récursive une fonction *in* qui étant donnés une hauteur de note h et un chant c, renvoie un booléen qui est vrai si une note de hauteur h apparait dans le chant c.
4. Donner le principe d'induction sur les termes représentant un chant.
5. Montrer en utilisant ce principe que pour tout chant c, si $le(h_1, c)$ et $in(h_2, c)$ alors $h_1 \leq h_2$.
6. On cherche à caractériser un chant dans lequel les notes vont en montant. C'est à dire que si une note n est chantée avant la note m alors la hauteur de n est inférieure ou égale à la hauteur de m. On note `montant`(c) cette propriété. Donner des règles d'inférence pour définir `montant`(c).
   Indications
   - On remarquera que une note seule ou un silence vérifient la propriété `montant` et que pour que les notes de `seq`(c_1, c_2) aillent en montant, il faut et il suffit qu'il existe une hauteur h telle que les notes de c_1 soient plus basses que h et les notes de c_2 soient plus hautes que h et que c_1 et c_2 soient eux-mêmes des chant qui aillent en montant.

- On pourra utiliser sans la redéfinir une fonction *ge* analogue à *le* qui étant donnés une hauteur h et un chant c renvoie vrai si la note h est plus haute que toutes les notes du chant c.

Exercice 2 *Classes d'équivalence.* On se place sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

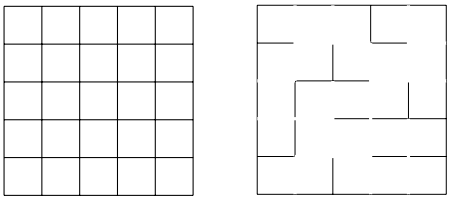
Soit la relation $R(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x - y$ est pair.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Donner les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 3 *Partitions*

1. Soit G un graphe non-orienté, montrer que la relation $R(x, y)$ qui est vraie s'il existe un chemin de x à y est une relation d'équivalence. Quel est le nom donné aux classes d'équivalence de cette relation ?
2. La structure union-find introduite en cours permet de représenter des partitions finies. Soit A un ensemble fini d'éléments de taille n, on notera U l'ensemble des structures union-find qui représentent les partitions de A. On ne dit pas comment ces partitions sont représentées mais on se donne les objets suivants pour travailler sur cette structure.
   - $\texttt{init} \in U$ représente la partition initiale formée des n singletons d'éléments de A
   - $\texttt{taille} \in U \to \mathbb{N}$ renvoie le nombre de paquets dans la partition
   - $\texttt{repr} \in A \times U \to A$, $\texttt{repr}(x, u)$ renvoie un représentant canonique du paquet dans lequel se trouve x. C'est-à-dire que deux éléments seront dans le même paquet s'ils ont le même représentant.
   - $\texttt{union} \in A \times A \times U \to U$, $\texttt{union}(x, y, u)$ renvoie une nouvelle partition dans laquelle les paquets de x et de y ont été fusionnés (s'ils étaient différents, sinon la partition est inchangée).

   Exprimer comme des formules logiques la spécification des objets introduits ci-dessus, en particulier comment peut-on caractériser les objets suivants
   - $\texttt{taille}(\texttt{init}), \texttt{repr}(x, \texttt{init})$
   - $\texttt{taille}(\texttt{union}(x, y, u)), \texttt{repr}(z, \texttt{union}(x, y, u))$
3. On cherche à construire un labyrinthe "aléatoire". Pour cela on va considérer une grille formée de $n \times n$ cases. On va retirer des murs de telle manière qu'il y ait à la fin toujours un chemin possible entre deux cases quelconques du labyrinthe.



   On suppose que l'on note A l'ensemble des cases de la grille et que l'on a une fonction aléatoire `choix-mur` qui nous renvoie au hasard un des murs interne de la grille. Un mur est représenté par le couple (x, y) des deux cases qu'il sépare.

   En utilisant la structure union-find introduite précédemment ainsi que la fonction `choix-mur`, proposer (en pseudo-code) un algorithme pour construire un labyrinthe. Le résultat de la fonction pourra être la liste des murs à retirer de la grille.

   Justifier pourquoi votre algorithme est correct.

Exercice 4 *Diagramme cartésien d'une relation.* Soit A un ensemble fini. On peut représenter une relation binaire sur A par un *diagramme cartésien* qui est une grille dont chaque ligne et chaque colonne est indicée par un élément de A. On marque une case de la ligne x et de la colonne y exactement lorsque $R(x, y)$ est vérifié.

1. Dessiner le diagramme cartésien de la relation d'ordre usuelle $\leq$ sur les entiers pour $A = [0, 4[$.
2. Comment reconnait-on sur le diagramme cartésien qu'une relation est réflexive, symétrique, anti-symétrique ?
3. Comment reconnait-on sur le diagramme un élément maximum ? minimum ? maximal ? minimal ?
4. Si l'ensemble A a n éléments, combien y-a-t-il de relations binaires sur A ? de relations réflexives ? symétriques ?

Exercice 5 *Ordre sur les mots*

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{0,1\}$. On note $\mathbb{B}^n$ l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^*$ l'ensemble des mots finis (de longueur quelconque).

On introduit une relation binaire $\prec$ sur $\mathbb{B}^*$ par le système d'inférence suivant ($x \in \mathbb{B}$ et $m, m_1, m_2 \in \mathbb{B}^*$) :

$$\frac{}{\epsilon \prec xm} \qquad \frac{}{0m_1 \prec 1m_2} \qquad \frac{m_1 \prec m_2}{xm_1 \prec xm_2}$$

On admettra sans le démontrer que cette relation est un ordre strict sur les mots.

1. Montrer que $100 \prec 11$.
2. Comparer les mots 0000, 00 et 1.
3. Définir par des équations récursives une fonction $\texttt{test} \in \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ telle que $\texttt{test}(m_1, m_2)$ est vrai exactement lorsque $m_1 \prec m_2$. On pourra introduire des équations pour les quatre cas :

$$\texttt{test}(\epsilon, \epsilon) = \ldots \quad \texttt{test}(\epsilon, xm) = \ldots \quad \texttt{test}(xm, \epsilon) = \ldots \quad \texttt{test}(xm_1, ym_2) = \ldots$$

4. Montrer que si $\texttt{test}(m_1, m_2)$ est faux alors soit $m_1 = m_2$, soit $m_2 \prec m_1$, (ce qui implique que la relation $\prec$ est un ordre total).
5. Si $x \in \mathbb{B}$, on note x^n le mot de longueur n qui ne contient que des x. On peut définir ce mot par des équations récursives sur n :

$$x^0 = \epsilon \qquad x^{n+1} = x(x^n)$$

   Montrer par récurrence sur n les deux propriétés suivantes :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \prec x^{n+1}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, 0^{n+1}1 \prec 0^n1$

6. La relation $\prec$ est-elle un ordre bien fondé ? justifier votre réponse.

Exercice 6 *Ordre structurel sur les arbres.*

On rappelle que l'ensemble des arbres binaires T est défini par un ensemble de termes construits sur une signature avec deux symboles `leaf` et `node`. On définit une relation sur les arbres par $t \leq u$ si t est un sous-arbre de u.

1. Donner des règles d'inférence pour définir la relation $t \leq u$.
2. Montrer que si $t \leq u$ alors $\texttt{size}(t) \leq \texttt{size}(u)$.
3. Montrer que cette relation est un ordre et que $\forall t \in T, \texttt{leaf} \leq t$.
4. Cet ordre est-il total ?
5. Deux éléments ont-il toujours une borne supérieure ? une borne inférieure ?
6. Montrer que l'ordre ainsi défini est bien fondé.