Licence STS, semestre 4 | 2015–16
Mathématiques pour l'Informatique 2 | 24 mars 2016
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo2`

Devoir maison - Préparation au TP noté

Ce devoir est un entraînement pour le TP noté du 12 avril et doit pouvoir être résolu en moins de 2h30.

Pour faire l'ensemble, vous récupérerez le squelette disponible à l'adresse suivante :
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo2/dm.v`

Toutes les définitions et les preuves doivent être réalisés en Coq. Lorsqu'on vous demande de justifier qu'une propriété n'est pas prouvable, vous fournirez un contre-exemple sous forme d'un commentaire.

Vous devez renvoyer le fichier squelette complété et renommé en *votre_nom.v* au plus tard le **lundi 11 avril** à votre chargée de TP (`stefania.dumbrava@lri.fr`).

Vous pouvez travailler seul ou à deux. Dans ce dernier cas, ne renvoyez qu'un fichier pour deux. N'oubliez pas de faire apparaître le nom ou les deux noms en tête du fichier renvoyé.

Exercice 1 (Logique propositionnelle)
Parmi les énoncés suivants, cinq sont vrais. Trouver lesquels, les traduire en Coq et les démontrer. Expliquer pourquoi les autres ne sont pas valides.

(a) $(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow Q \Rightarrow P$

(b) $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$

(c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow (\neg P \vee Q)$

(d) $(\neg(P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (R \wedge \neg P) \vee \neg Q$

(e) $(P \vee Q) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$

(f) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow Q) \Rightarrow R \Rightarrow Q$

(g) $(P \vee Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow P$

(h) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \vee R))$

Exercice 2 (Quantificateurs)
Soit un prédicat binaire $p(x, y)$.

Prouver que l'ordre de deux quantifications existentielles ne compte pas c'est-à-dire

$$\exists x, \exists y, p(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, p(x, y)$$

Exercice 3 (Modélisation)
On cherche à modéliser un plan de table, c'est-à-dire comment les personnes sont installées pour diner autour de tables. On se donne les prédicats suivants

`voisin`(x, y)	y est un voisin de x
`ami`(x, y)	x et y sont amis
`enfant`(x)	x est un enfant

1. Exprimer par des formules logiques les propriétés suivantes :
   (a) toute personne a au moins un voisin qui est un ami ;
   (b) `ami` est une relation irreflexive ;
   (c) deux enfants ne sont pas voisins ;
   (d) il y a au moins un enfant.

2. En supposant que les quatre propriétés précédentes sont vraies, montrer qu'il existe un enfant et un adulte (quelqu'un qui n'est pas un enfant) qui sont amis.
3. Si on retire une des quatre hypothèses, est-il encore possible de prouver qu'il existe un enfant et un adulte qui sont amis ? pour chaque choix d'hypothèse retirée, si la réponse est oui on donnera une preuve, si la réponse est non on donnera un contre-exemple (c'est-à-dire une situation où toutes les hypothèses sauf celle que l'on a retirée sont vraies et où la conclusion est fausse).
4. Sachant que les tables sont rondes et que toutes les places sont occupées, décrire par des règles d'inférence la relation $\texttt{table}(x, y)$ qui exprime que x et y sont assis à la même table.
5. Montrer que `table` est une relation d'équivalence.

Exercice 4 (Récurrence)

On définit par des équations récursives les fonctions sur les entiers 2^n et $\frac{n}{2}$ de la manière suivante

$$2^0 = 1 \qquad 2^{n+1} = 2 \times 2^n \qquad\qquad \frac{0}{2} = 0 \qquad \frac{1}{2} = 0 \qquad \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

Dans le fichier squelette, l'expression 2^n est notée $\texttt{exp2}(n)$ et l'expression $\frac{n}{2}$ est notée $\texttt{div2}(n)$.

1. Montrer les égalités $\forall n, \texttt{div2}(2 \times n) = n$ et $\forall n, \texttt{exp2}(2 \times n) = \texttt{exp2}(n) \times \texttt{exp2}(n)$ par récurrence sur n.
2. Montrer par récurrence sur n que $\forall n : \mathbb{N}, n < 2^n$.
3. Soit un prédicat P sur les entiers qui vérifie les propriétés suivantes :
   - $P(1)$
   - $\forall n, P(n) \Rightarrow P(2 \times n)$
   - $\forall n, P(n+1) \Rightarrow P(n)$.

   (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, P(2^n)$

   (b) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow \forall k \leq n, P(k))$.

   (c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.
4. On cherche à justifier l'existence d'une unique fonction sur les entiers f qui vérifie les trois équations suivantes :
$$f(1) = 2 \qquad f(n) = \frac{f(n+1)}{2} \qquad f(2 \times n) = f(n)^2$$

   (a) Définir par des règles inductives une relation $F(n, k)$ équivalente à $f(n) = k$ sans utiliser f, et qui représente le graphe d'une fonction qui vérifie les équations précédentes.

   (b) Montrer par induction sur la relation F que $\forall n\, k \in \mathbb{N}, F(n, k) \Rightarrow k = 2^n$.

   (c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, F(n, k)$ en utilisant le principe de récurrence de la question 3c.