Lambda Calcul

Rappels du cours

La règle de β-réduction est : $(\lambda x.t)\,u \longrightarrow_\beta t[x \leftarrow u]$

La relation de β-réduction est étendue à l'ensemble des termes par congruence (le calcul peut avoir lieu n'importe où dans le terme)

si $t \longrightarrow_\beta t'$ alors

- $t\,u \longrightarrow_\beta t'\,u$
- $u\,t \longrightarrow_\beta u\,t'$
- $\lambda x.t \longrightarrow_\beta \lambda x.t'$

Par définition $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x.(x\,x))\,(\lambda x.(x\,x))$

on a vu que Δ se réduit en une étape en lui même $\Delta \longrightarrow_\beta \Delta$.

Exercice 1

Explorer les différentes réductions possibles à partir du terme $t \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x\,y.y)\,\Delta$, que constatez-vous ?

Correction : *Le terme t s'écrit $(\lambda x.(\lambda y.y)\,\Delta)$ et donc une étape de β-reduction donne le terme $\lambda y.y$ qui est en forme normale.*

Mais on a aussi $\Delta \longrightarrow_\beta \Delta$ donc par congruence $(\lambda x\,y.y)\,\Delta \longrightarrow_\beta (\lambda x\,y.y)\,\Delta$ et donc $t \longrightarrow_\beta t$.

A partir du même terme on peut donc créer une réduction infinie ou bien obtenir une forme normale suivant la stratégie adoptée dans le choix de l'endroit de la réduction.

Exercice 2

Soit le terme $Y_f \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x.f\,(x\,x))(\lambda x.f\,(x\,x))$

- montrer que Y_f se réduit en $f\,Y_f$.
  On dit que Y_f est un *point-fixe* de f.
  Correction : *On note δ_f le terme $\lambda x.f\,(x\,x)$ on a donc $Y_f = \delta_f\,\delta_f$*
  En remplaçant δ_f par sa définition on trouve $(\lambda x.f\,(x\,x))\,\delta_f$ on peut appliquer une β-réduction et remplacer x par δ_f dans $f\,(x\,x)$ on obtient $f\,(\delta_f\,\delta_f)$ ce qui est exactement $f\,Y_f$.
- le terme Y_f peut-il être typé dans le λ-calcul simplement typé ?
  Correction : *Dans le λ-calcul simplement typé, on ne peut pas typé le terme $(x\,x)$ car il faut à la fois que x est un type de la forme $\alpha \to \beta$ et un type de la forme α. or pour des raisons de taille on ne peut pas trouver de types α et β tels que $\alpha \to \beta = \alpha$*

Exercice 3

1. Soit le terme $\lambda f\,x.f\,(n\,f\,x)$
   - dire quelles sont ses variables libres et liées
   - donner son type le plus général
   - ce terme est-il en forme normale ?

   Correction :
   - *n est une variable libre, f et x sont des variables liées*
   - *le type le plus général est $(\alpha \to \beta) \to \gamma \to \beta$ avec $n : (\alpha \to \beta) \to \gamma \to \alpha$*

2. On note N le type $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Pour tout entier naturel, $n \in \mathbb{N}$, on note $\tilde{n}$ le terme $\lambda f\, x. \underbrace{(f \ldots (f}_{n \text{ fois}}\, x) \ldots)$.
   - donner les termes correspondant à $\tilde{0}, \tilde{1}$ et $\tilde{2}$.
     Correction : $\tilde{0} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\, x.x \quad \tilde{1} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\, x.f\, x \quad \tilde{2} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\, x.f\,(f\, x)$
   - montrer que pour tout entier n, on a $\tilde{n} : N$
     Correction : *En appliquant les règles de typage on est ramené à montrer que*
     $$f : \alpha \to \alpha, x : \alpha \vdash \underbrace{(f \ldots (f}_{n \text{ fois}}\, x) \ldots) : \alpha$$
     ce qui se fait par une simple récurrence sur n.
   - montrer que le terme $\lambda n\, f\, x.f\,(n\, f\, x)$ a pour type $N \to N$ (on construira la dérivation).
     Dans la suite ce terme est noté s
     Correction : *on note ρ l'environnement de typage $n : N, f : \alpha \to \alpha, x : \alpha$*
     $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\rho \vdash f : \alpha \to \alpha} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\rho \vdash n : (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha} \quad \dfrac{}{\rho \vdash f : \alpha \to \alpha}}{\rho \vdash (n\, f) : \alpha \to \alpha}}{\rho \vdash (n\, f) : \alpha \to \alpha} \quad \dfrac{}{\rho \vdash x : \alpha}}{\rho \vdash (n\, f\, x) : \alpha}}{n : N, f : \alpha \to \alpha, x : \alpha \vdash f\,(n\, f\, x) : \alpha}}{\dfrac{n : N, f : \alpha \to \alpha \vdash \lambda x.f\,(n\, f\, x) : \alpha \to \alpha}{\dfrac{n : N \vdash \lambda f\, x.f\,(n\, f\, x) : N}{\vdash \lambda n\, f\, x.f\,(n\, f\, x) : N \to N}}}$$
   - quelle est la forme normale du terme $s\,\tilde{n}$?
     Correction : *On a $s\,\tilde{n} \longrightarrow_\beta^* \widetilde{n+1}$ qui est en forme normale. En effet $s\,\tilde{n} \longrightarrow_\beta \lambda f\, x.f\,(\tilde{n}\, f\, x)$ on a par ailleurs $\tilde{n}\, f\, x \longrightarrow_\beta . \longrightarrow_\beta \underbrace{(f \ldots (f}_{n \text{ fois}}\, x) \ldots)$, on en déduit $s\,\tilde{n} \longrightarrow_\beta^* \lambda f\, x. \underbrace{(f \ldots (f}_{n+1 \text{ fois}}\, x) \ldots)$*
3. utiliser Isabelle pour vérifier vos résultats
   Correction : *voir le fichier* `http://www.lri.fr/~paulin/PreuvesInteractives/tp1/Lambda.thy`