

Exemple d'implantation en Sage : Les polynômes multivariés

Viviane Pons

Journée des doctorants LIGM

22 février 2011

Qu'est ce que Sage ?

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit
- ▶ Un ensemble d'interfaces : Atlas, GAP, GMP, Linbox, Maxima, MPFR, PARI/GP, NetworkX, NTL, Numpy/Scipy, Singular, Symmetrica, ...

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit
- ▶ Un ensemble d'interfaces : Atlas, GAP, GMP, Linbox, Maxima, MPFR, PARI/GP, NetworkX, NTL, Numpy/Scipy, Singular, Symmetrica, ...
- ▶ Une communauté de développeurs

Qu'est ce que Sage ?

- ▶ Un logiciel de calcul formel
- ▶ Un logiciel libre et gratuit
- ▶ Un ensemble d'interfaces : Atlas, GAP, GMP, Linbox, Maxima, MPFR, PARI/GP, NetworkX, NTL, Numpy/Scipy, Singular, Symmetrica, ...
- ▶ Une communauté de développeurs
- ▶ Un logiciel écrit en Python

Quelques chiffres

- ▶ Créé en 2005
- ▶ 500k lignes de code
- ▶ 184 contributeurs dans le monde
- ▶ 10000 utilisateurs

Python

- ▶ Un langage interprété
- ▶ Orienté objet

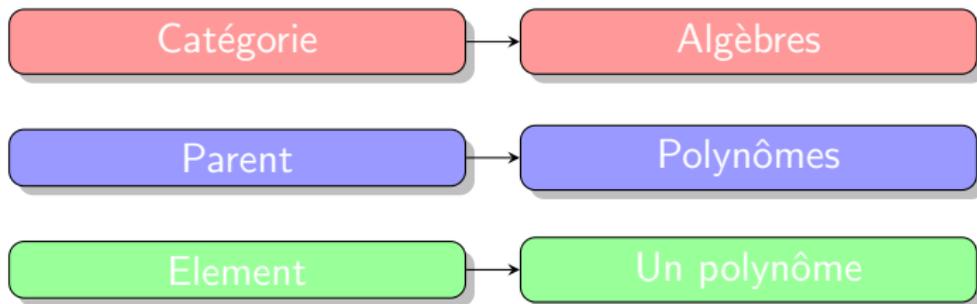
Python

- ▶ Un langage interprété
- ▶ Orienté objet

Problématique

Quelle architecture pour les structures mathématiques ?

Un parallélisme de structures : objets / mathématiques



Polynômes Multivariés

Polynômes Multivariés

$\mathfrak{Pol}(x_1, \dots, x_n) :=$ ensemble des polynômes en n variables.

Un monôme est de la forme

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un vecteur de \mathbb{Z}^n

Polynômes : somme formelle de vecteurs

On définit une action sur les vecteurs.

Soit $v \in \mathbb{Z}^n$

$$vs_j = (\dots, v_{i+1}, v_i, \dots)$$

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \rightarrow$ Permutations de n

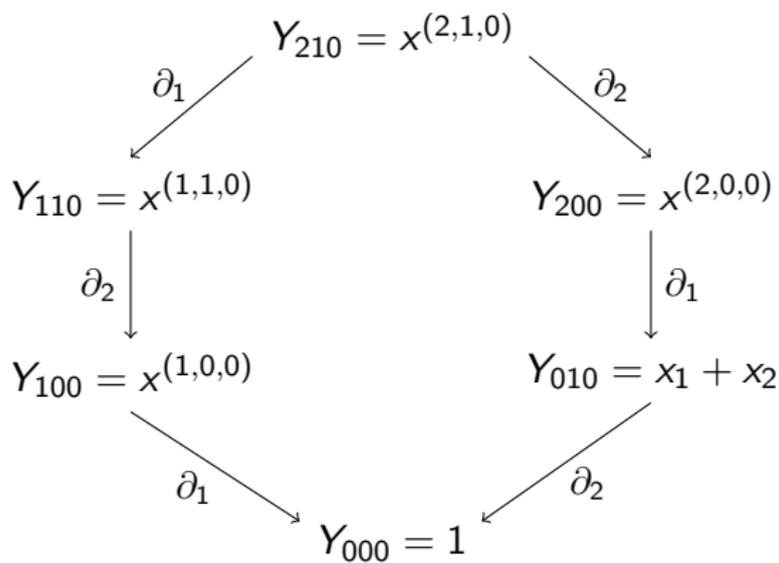
De l'action sur les vecteurs, on tire une action sur les polynômes :

$$x^v s_j = x^{vs_j}$$

On définit un opérateur de *différence divisée*

$$f \partial_i = \frac{f - f^{s_i}}{x_i - x_{i+1}}$$

Base de Schubert :



Les polynômes de Schubert forment une **base linéaire des polynômes à n variables.**

Exemple :

$$x^{(2,3,1)} + x^{(1,1,2)} = Y_{112} - Y_{121} + Y_{231} - Y_{321}$$

D'autres opérateurs créent d'autres bases : base de Demazure

$$x^{(1,2,3)} = K_{123} - K_{132} - K_{213} + K_{231} + K_{312} - K_{321}$$

Les objectifs de notre implantation :

Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases

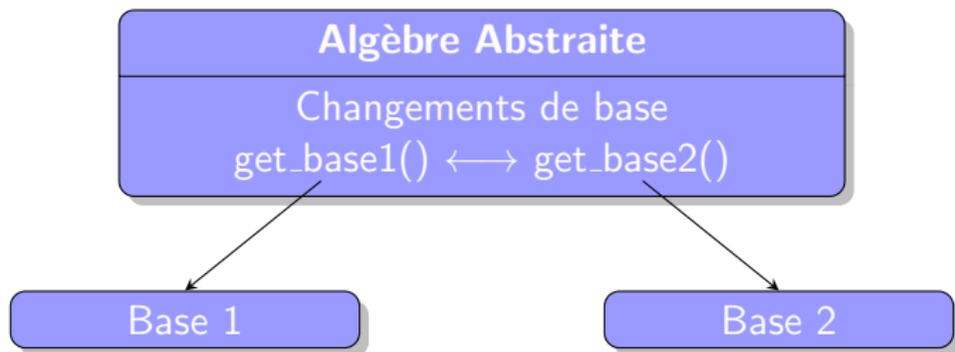
Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases
- ▶ Un nombre quelconque de variables

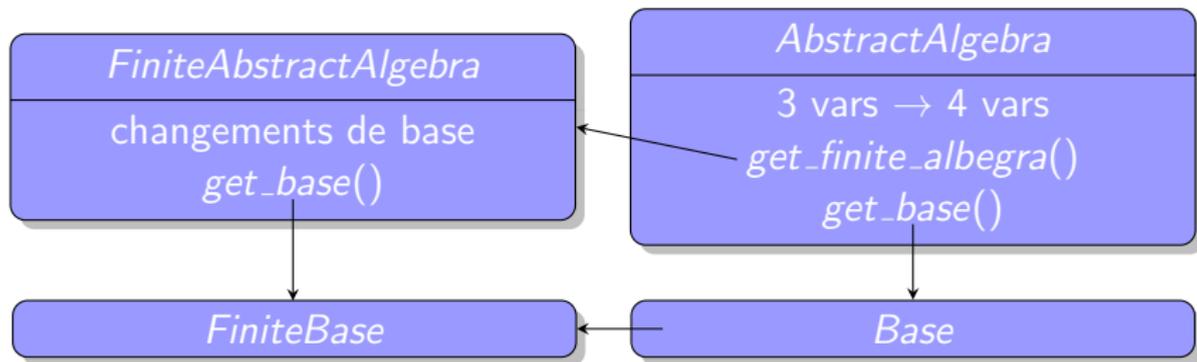
Les objectifs de notre implantation :

- ▶ Un anneau multibases
- ▶ Un nombre quelconque de variables
- ▶ Des structures s'inspirant et s'insérant dans les structures déjà existantes

Architecture standard :

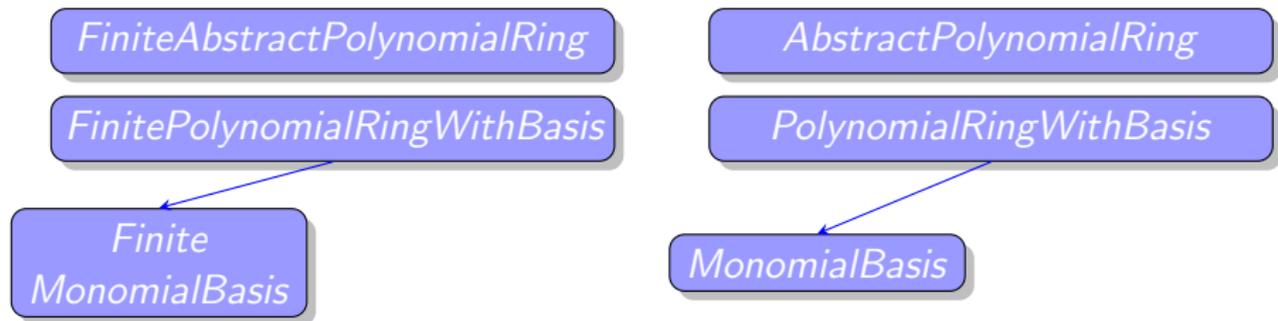


Deux types de classes : les classes *Finite* et la classe union

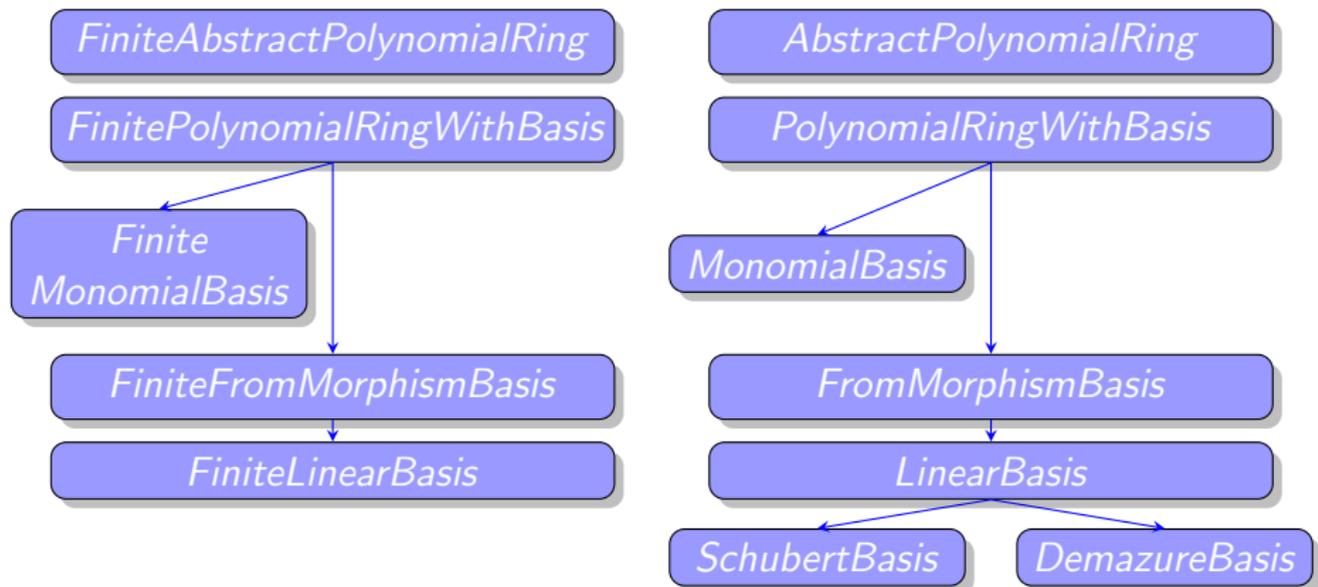


Processus presque invisible pour l'utilisateur.

Définir les bases (Schubert, Demazure) à partir de leurs conversions dans la base monomiale.



Définir les bases (Schubert, Demazure) à partir de leurs conversions dans la base monomiale.



L'implantation au sein de Sage nous permet :

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ l'utilisation de structures préexistantes : Algèbres libres, opérateurs

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ l'utilisation de structures préexistantes : Algèbres libres, opérateurs
- ▶ l'utilisation d'algorithmes : changements de bases triangulaires

L'implantation au sein de Sage nous permet :

- ▶ l'utilisation de structures préexistantes : Algèbres libres, opérateurs
- ▶ l'utilisation d'algorithmes : changements de bases triangulaires
- ▶ Une programmation modulaire : indépendance par rapport au corps de base, création des polynômes doubles

Où en sommes-nous ?

- ▶ Débuté en juin 2010, aujourd'hui environ 4000 lignes de code.
- ▶ Disponible sous forme d'un patch expérimental pour Sage
- ▶ Objectif d'intégration à Sage d'ici la fin de l'année

Merci de votre attention.

En savoir plus sur Sage :



[Juillet 2010] Calcul mathématique avec Sage

A. Casamayou, G. Connan, T. Dumont, L. Fousse, F. Maltey, M. Meulien, M. Mezzarobba, C. Perne, N.M. Thiéry, P. Zimmermann
sagebook.gforge.inria.fr/



[Janvier 2011, Orsay] Sage Days 28 : Dynamics, geometry, combinatorics...

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris Sud
<http://wiki.sagemath.org/days28>