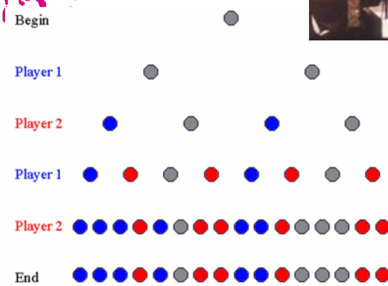
Why Minimax Works: An alternative explanation

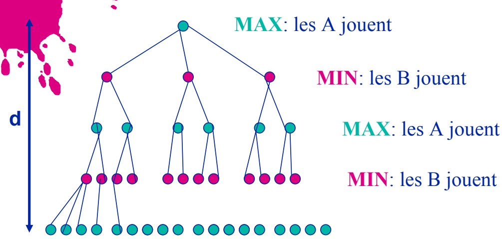
Mitja Luštrek, Matjaž Gams, Ivan Bratko

IJCAI – 05

Minimax



Constatation empirique



- Les programmes qui reposent sur le Minimax produisent *généralement* de meilleurs résultats lorsque l'on accroît la profondeur de recherche d…

Arguments heuristiques en faveur de l'anticipation

- *Visibilité*: plus on se rapproche de la fin, plus l'issue du jeu devient apparente et donc plus l'évaluation doit être pertinente.
- *Filtrage*: tandis qu'une évaluation statique est calculée sur la base des propriétés d'une seule position, la valeur renvoyée par le Minimax intègre tous les nœuds pris en considération dans la recherche

Pourquoi y a-t-il un problème?

- Des travaux conduits au débuts des années quatre-vingts montrent que cet argument (en particulier celui du filtrage) est erroné.
- Dans un classe de jeux dits *pathologiques*, plus l'exploration devient profonde, plus la qualité du résultat se dégrade…

Beal, D. An analysis of minimax. In Advances in Computer Chess, 2, page 103-109, 1980

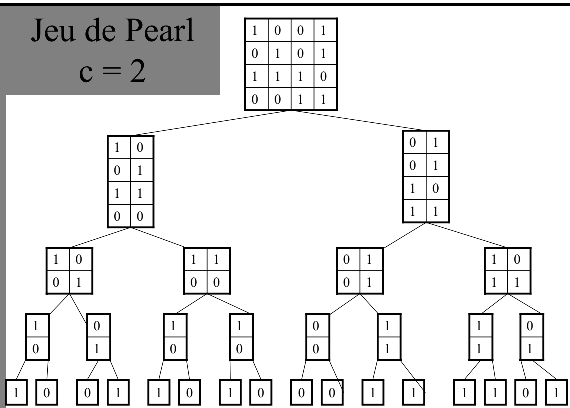
Nau, D. An investigation of the causes of pathology in games. Artificial Intelligence, 19 (3): 257-278, Novembre 1982

Pearl, J. On the nature of pathology in game searching. Artificial Intelligence, 20 (4): 427-453, July 1983

Exemple de jeux pathologiques: **les jeux de Pearl**

- Échiquier 2c sur 2c, où c est un entier > 0
- Affectation aléatoire de 1 avec la probabilité p et de 0 avec la probabilité 1-p sur les cases de l'échiquier
- Mouvement: diviser l'échiquier en deux parties égales et choisir de conserver l'une ou l'autre moitié
  - Le premier jouer divise verticalement
  - Le second horizontalement
- Les joueurs continuent alternativement jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule case
  - Si la case contient 1, le dernier joueur gagne, sinon il perd

# Jeu de Pearl
c = 2



Hypothèses du modèle de Beal

1. Les arbres de jeu ont un facteur de branchement uniforme
2. Les nœuds de l'arbre peuvent avoir deux valeurs: gagnant, perdant
3. Les valeurs de nœuds sont distribuées de telle sorte, qu'à chaque niveau, la proportion de pertes pour celui qui joue est la même
4. Sur chaque niveau, les valeurs de nœuds sont indépendantes les unes des autres
5. L'erreur de l'heuristique statique d'évaluation d'un nœud à la plus grande profondeur de recherche étant la probabilité de se tromper, c'est-à-dire de prendre un gain pour une perte ou vice-versa, elle est indépendante de la profondeur de la recherche

LIP6 – équipe ACASA Jean-Gabriel Ganascia
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Notations

- $h_d(pos)$ estimation heuristique de la position pos avec une exploration de profondeur d
- v(pos): valeur de la position appartient {0, 1}
- $p_d = p(h_d(pos) = 1 | v(pos)=0)$
- $q_d = p(h_d(pos) = 0 | v(pos)=1)$
- $k = p(v(pos) = 0)$
- $k_{i+1} = (1-k_i)^b$ (b étant le facteur de branchement)

LIP6 – équipe ACASA Jean-Gabriel Ganascia
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Conclusions

- L'hypothèse 3 impose $k_i = k_{i+1}$ d'où $k_i = c_b$ $\forall i$ avec $c_b = (1-c_b)^b$ qui découle de $k_{i+1} = (1-k_i)^b$
par exemple, pour b=2, $1 - 3c_2 + c_2^2$ d'où $c_2=0.382$

Le calcul donne:

- $p_{i+1} = 1 - (1-q_i)^b$
- $q_{i+1} = \{[k_i p_i + (1-k_i)(1-q_i)]^b - [(1-k_i)(1-q_i)]^b / 1-k_{i+1}$

Si on impose $p_d = q_d$ l'erreur à la racine définie comme $p_0 k_0 + q_0(1-k_0)$ augmente avec d!

LIP6 – équipe ACASA Jean-Gabriel Ganascia
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

En abandonnant 3 et en fixant k_d …

- $p_{i+1} = 1 - (1-q_i)^b$
- $q_{i+1} = \{[k_i p_i + (1-k_i)(1-q_i)]^b - [(1-k_i)(1-q_i)]^b / 1-k_{i+1}$

TABLE 1 $k_d = 0.5$, $p_0 = q_0 = 0.1$

d	b = 2			b = 5		
	p_d	q_d	$\bar{P}_d/\bar{P}_0$	p_d	q_d	$\bar{P}_d/\bar{P}_0$
0	0.1000	0.1000	1.000	0.1000	0.1000	1.000
1	0.1900	0.0763	1.331	0.4095	0.0504	2.300
2	0.1280	0.1532	1.406	0.1304	0.3086	2.195
3	0.2504	0.1066	1.785	0.6691	0.0647	3.669
4	0.1601	0.2239	1.920	0.0994	0.6902	3.948
5	0.3291	0.1384	2.338	0.9621	0.0125	4.873
6	0.1903	0.3129	2.516	0.0076	0.9843	4.959
7	0.4620	0.1641	2.950	1.0000	0.0000	5.000
8	0.2092	0.4202	3.147	0.0000	1.0000	5.000

LIP6 – équipe ACASA Jean-Gabriel Ganascia
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

TABLE 2 $k_d = 0.1$, $p_0 = q_0 = 0.1$

d	b = 2			b = 5		
	p_d	q_d	$\bar{P}_d/\bar{P}_0$	p_d	q_d	$\bar{P}_d/\bar{P}_0$
0	0.1000	0.1000	1.000	0.1000	0.1000	1.000
1	0.1900	0.0484	0.626	0.4095	0.0243	0.628
2	0.1580	0.1025	1.081	0.2033	0.1823	1.844
3	0.3038	0.0508	0.761	0.8054	0.0170	0.958
4	0.2324	0.1187	1.301	0.2209	0.4472	4.246
5	0.4464	0.0538	0.930	0.9936	0.0011	1.003
6	0.3132	0.1474	1.639	0.0347	0.9321	8.423
7	0.6023	0.0536	1.085	1.0000	0.0000	1.000
8	0.3837	0.1912	2.104	0.0000	1.0000	9.000

TABLE 3 $k_d = 0.01$, $p_0 = q_0 = 0.1$

d	b = 2			b = 5		
	p_d	q_d	$\bar{P}_d/\bar{P}_0$	p_d	q_d	$\bar{P}_d/\bar{P}_0$
0	0.1000	0.1000	1.000	0.1000	0.1000	1.000
1	0.1900	0.0245	0.262	0.4095	0.0070	0.110
2	0.1681	0.0610	0.621	0.2435	0.0871	0.887
3	0.3253	0.0165	0.196	0.8635	0.0029	0.115
4	0.2693	0.0485	0.507	0.3360	0.2265	2.276
5	0.5042	0.0135	0.185	0.9985	0.0001	0.101
6	0.3917	0.0495	0.529	0.0911	0.8151	8.078
7	0.6932	0.0114	0.182	1.0000	0.0000	0.100
8	0.5105	0.0600	0.645	0.0000	1.0000	9.900

LIP6 – équipe ACASA Jean-Gabriel Ganascia
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Tentatives d'explication

- Michon: la pathologie dépend de la probabilité de distribution du facteur de branchement
- Bratko & Gams, Pearl, …: essais avec une évaluation multiple (et pas seulement 2 valeurs)
- Bratko & Gams, Nau, Beal, Lustrek etc. notent que la similitude des positions proches élimine la pathologie
- Pearl montre que pour éliminer la pathologie, l'erreur de la fonction d'évaluation doit décroître exponentiellement avec la profondeur de la recherche

Conclusion: la pathologie n'est généralement pas observée sur les jeux réels parce que les valeurs des positions ne sont pas indépendantes les unes des autres

Mitja Luštrek, Matjaž Gams, Ivan Bratko IJCAI – 2005

- Modèle fondé sur un évaluation réelle
  - Nécessaire pour jeux dont l'issue est multivaluée (Othello, etc.)
  - Dans les jeux où l'issue est binaire (Échecs, Dames etc.) où éventuellement ternaire si l'on considère la partie nulle, les valeurs multiples expriment l'incertitude sur l'issue
  - Scheucher & Kaindl montrent qu'une fonction d'évaluation binaire se comporte très médiocrement pour le jeu d'échec

Hypothèses du modèle de Beal

1. Les arbres de jeu ont un facteur de branchement uniforme
2. Les nœuds de l'arbre peuvent avoir deux valeurs: gagnant, perdant
3. Les valeurs de nœuds sont distribuées de telle sorte, qu'à chaque niveau, la proportion de pertes pour celui qui joue est la même
4. Sur chaque niveau, les valeurs de nœuds sont indépendantes les unes des autres
5. L'erreur de l'heuristique statique d'évaluation d'un nœud à la plus grande profondeur de recherche étant la probabilité de se tromper, c'est-à-dire de prendre un gain pour une perte ou vice-versa, elle est indépendante de la profondeur de la recherche

Hypothèses du modèle de Luštrek, Gams et Bratko

1. Les arbres de jeu ont un facteur de branchement uniforme
2. Les nœuds de l'arbre ont des valeurs réelles
3. *Si les valeurs réelles des nœuds étaient converties en gains et pertes,* ceux-ci seraient distribués de telle sorte, qu'à chaque niveau, la proportion de pertes pour celui qui joue serait la même
4. Sur chaque niveau, les valeurs de nœuds sont indépendantes les unes des autres
5. L'erreur de l'heuristique statique d'évaluation d'un nœud à la plus grande profondeur de recherche ayant un bruit distribué normalement, elle est indépendante de la profondeur de recherche et de la valeur du nœud

Hypothèses du modèle de Beal

1. Les arbres de jeu ont un facteur de branchement uniforme
2. Les nœuds de l'arbre peuvent avoir deux valeurs: gagnant, perdant
3. Les valeurs de nœuds sont distribuées de telle sorte, qu'à chaque niveau, la proportion de pertes pour celui qui joue est la même
4. Sur chaque niveau, les valeurs de nœuds sont indépendantes les unes des autres
5. L'erreur de l'heuristique statique d'évaluation d'un nœud à la plus grande profondeur de recherche étant la probabilité de se tromper, c'est-à-dire de prendre un gain pour une perte ou vice-versa, elle est indépendante de la profondeur de la recherche

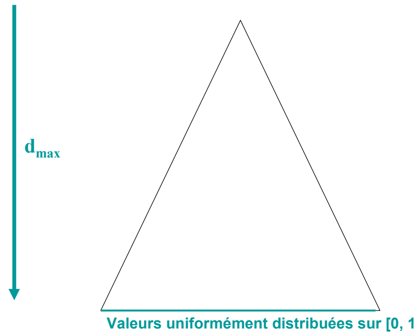
Expérimentations

- Arbres de jeu construits conformément au modèle en affectant des valeurs uniformément distribuées sur [0, 1] aux feuilles à la profondeur d_{max}
- Les valeurs des nœuds internes aux différentes profondeurs $d < d_{max}$ sont obtenues par calcul en appliquant le Minimax
- Les valeurs heuristiques à profondeur d sont calculées en dégradant les valeurs calculées avec un bruit normalement distribué
- Les valeurs calculées à profondeur < d sont calculées à partir des valeurs distribuées à d en appliquant le Minimax

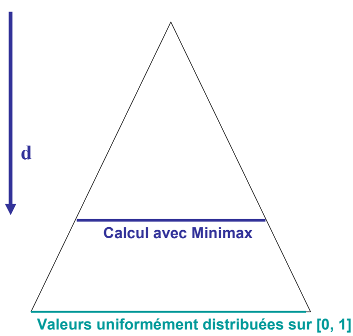
Expérimentations: étape 0

Construction d'un arbre de facteur de branchement b et de profondeur d_{max}

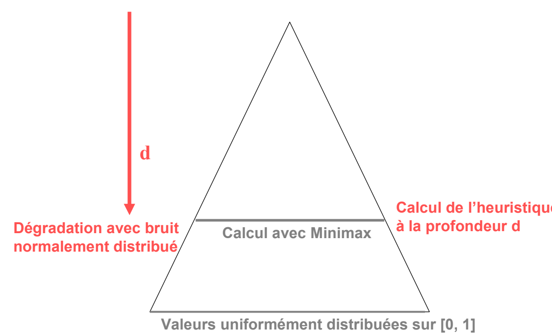
Expérimentations: étape 1



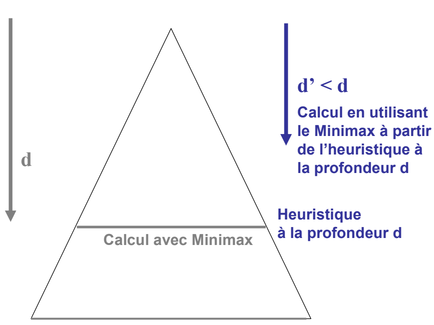
Expérimentations: étape 2



Expérimentations: étape 3



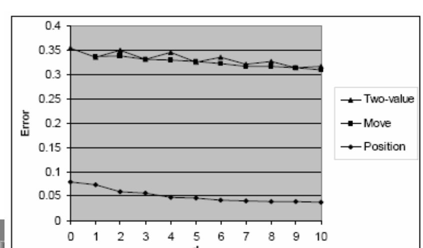
Expérimentations: étape 4



Expérimentations

- *Erreurs de position*: différence entre la vraie valeur et la valeur heuristique
- *Erreur de mouvement*: probabilité de choisir un mauvais mouvement
- *« two value »:* Probabilité de confondre un gain avec une perte et vice-versa

b = 2;
dmax = 10;
10 000 arbres de jeu



A C A S A

Pourquoi ce modèle n'est pas pathologique?

- Le bruit normalement distribué porte sur la valeur dans [0, 1] et non sur le gain de la partie dans {0, 1} *hypothèse 5 du modèle différente de celle de Beal*

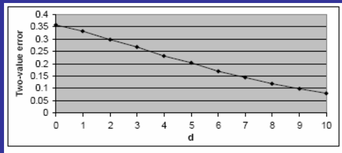


Figure 3: Two-value error at the lowest level of search with respect to the depth of search.

Par exemple, si le bruit est normalement distribué avec une déviation standard de 0,1, la probabilité de gain ou de perte de la partie à profondeur d diminue linéairement en fonction de d!

LIP6

A C A S A

Retrouver la pathologie…

- Si le bruit est ajusté sur la probabilité de gain ou de perte, toujours avec une déviation standard de 0,1

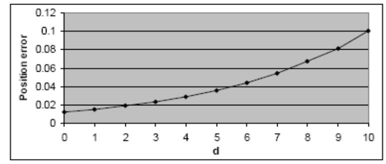
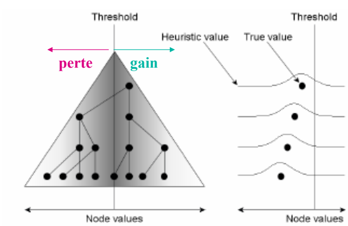


Figure 4: Position error at the lowest level of search with respect to the depth of search when two-value error at the lowest level of search is always 0.1.

LIP6

A C A S A

Adéquation du modèle et caractérisation des cas pathologiques



- Scheucher & Kaindl 1998: probabilité d'erreur sur l'issue de la partie

LIP6

A C A S A

Étude mathématique

- $F_i(x)$: distribution des valeurs à la profondeur i de l'arbre de jeu
- F(x)

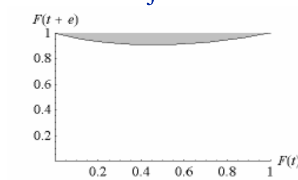


Figure 9: $F(t+e)$ as a function of $F(t)$.

À suivre