Prédiction de suites individuelles : une méthode de (méta-)apprentissage séquentiel

Gilles Stoltz

DMA, ENS de Paris

Plan de l’exposé

1 – Le modèle de la prédiction de suites individuelles

Plan de l'exposé

1 – Le modèle de la prédiction de suites individuelles

2 – En information complète et pour la prédiction randomisée, borne générale $\sqrt{n}$ sur le regret

Plan de l'exposé

1 – Le modèle de la prédiction de suites individuelles

2 – En information complète et pour la prédiction randomisée, borne générale $\sqrt{n}$ sur le regret

3 – Un exemple de prédiction avec information imparfaite : les jeux avec signaux

Plan de l'exposé

1 – Le modèle de la prédiction de suites individuelles

2 – En information complète et pour la prédiction randomisée, borne générale $\sqrt{n}$ sur le regret

3 – Un exemple de prédiction avec information imparfaite : les jeux avec signaux

4 – Prédiction non randomisée : agrégation séquentielle de prédicteurs, inégalités oracle exactes

Prédire une suite individuelle

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Les observations

- (ainsi que les prédictions) sont réalisées de manière séquentielle,

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Les observations

- (ainsi que les prédictions) sont réalisées de manière séquentielle,
- ne reposent sur aucun modèle stochastique,

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Les observations

- (ainsi que les prédictions) sont réalisées de manière séquentielle,
- ne reposent sur aucun modèle stochastique,

c'est ce que l'on appelle des observations données par des suites individuelles.

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Les observations

- (ainsi que les prédictions) sont réalisées de manière séquentielle,
- ne reposent sur aucun modèle stochastique,

c'est ce que l'on appelle des observations données par des suites individuelles.

Notre mission est, à tous les tours de jeu $t = 1, 2, \ldots$, de prédire y_t en se fondant sur les $y_1^{t-1} = (y_1, \ldots, y_{t-1})$.

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Les observations

- (ainsi que les prédictions) sont réalisées de manière séquentielle,
- ne reposent sur aucun modèle stochastique,

c'est ce que l'on appelle des observations données par des suites individuelles.

Notre mission est, à tous les tours de jeu $t = 1, 2, \ldots$, de prédire y_t en se fondant sur les $y_1^{t-1} = (y_1, \ldots, y_{t-1})$.

L'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ est alors dévoilée et il s'agit de la comparer à la prédiction $\widehat{p}_t \in \mathcal{X}$.

Description, objectifs

On demande à un statisticien de prédire une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments issus d'un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$.

Ses prédictions $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots$ sont choisies dans un ensemble de prédictions $\mathcal{X}$.

Les observations

- (ainsi que les prédictions) sont réalisées de manière séquentielle,
- ne reposent sur aucun modèle stochastique,

c'est ce que l'on appelle des observations données par des suites individuelles.

Notre mission est, à tous les tours de jeu $t = 1, 2, \ldots$, de prédire y_t en se fondant sur les $y_1^{t-1} = (y_1, \ldots, y_{t-1})$.

L'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ est alors dévoilée et il s'agit de la comparer à la prédiction $\widehat{p}_t \in \mathcal{X}$.

Exemple. Prévisions météorologiques, $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ et $\mathcal{X} = [0, 1]$.

Des experts donnent leur avis

On suppose généralement que le statisticien a accès à un nombre fini de prédicteurs de référence, appelés experts. Ils sont indicés par $j = 1, \ldots, N$.

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Prédire une suite individuelle
- Description, objectifs
- Experts
- Regret
- Prédiction randomisée
- Jeu répété

Information complète

Information imparfaite

Agrégation séquentielle

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Le statisticien prédit désormais la valeur de y_t en se fondant sur les y_1^{t-1} et sur les avis $f_{j,t}$.

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Le statisticien prédit désormais la valeur de y_t en se fondant sur les y_1^{t-1} et sur les avis $f_{j,s}$, $s \leqslant t$.

Prédire une suite individuelle
- Description, objectifs
- Experts
- Regret
- Prédiction randomisée
- Jeu répété

Information complète

Information imparfaite

Agrégation séquentielle

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Le statisticien prédit désormais la valeur de y_t en se fondant sur les y_1^{t-1} et sur les avis $f_{j,s}$, $s \leqslant t$.

Il cherche à prédire presqu'aussi bien que le meilleur expert.

Notons que le meilleur expert ne peut être déterminé que rétrospectivement, tandis que le statisticien est assujetti à une contrainte de prédiction séquentielle.

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Le statisticien prédit désormais la valeur de y_t en se fondant sur les y_1^{t-1} et sur les avis $f_{j,s}$, $s \leqslant t$.

Il cherche à prédire presqu'aussi bien que le meilleur expert.

Notons que le meilleur expert ne peut être déterminé que rétrospectivement, tandis que le statisticien est assujetti à une contrainte de prédiction séquentielle.

Afin de préciser mathématiquement ce qu'on entend par meilleur expert, on considère une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Le statisticien prédit désormais la valeur de y_t en se fondant sur les y_1^{t-1} et sur les avis $f_{j,s}$, $s \leqslant t$.

Il cherche à prédire presqu'aussi bien que le meilleur expert.

Notons que le meilleur expert ne peut être déterminé que rétrospectivement, tandis que le statisticien est assujetti à une contrainte de prédiction séquentielle.

Afin de préciser mathématiquement ce qu'on entend par meilleur expert, on considère une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

Exemple. Prévisions météorologiques, $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ et $\mathcal{X} = [0, 1]$,

$$\ell(x, y) = |y - x|$$

Des experts donnent leur avis

Les experts forment, à chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$, des prédictions $f_{j,t} = f_{j,t}(y_1^{t-1}) \in \mathcal{X}$, $j = 1, \ldots, N$, souvent appelées avis, conseils.

Le statisticien prédit désormais la valeur de y_t en se fondant sur les y_1^{t-1} et sur les avis $f_{j,s}$, $s \leqslant t$.

Il cherche à prédire presqu'aussi bien que le meilleur expert.

Notons que le meilleur expert ne peut être déterminé que rétrospectivement, tandis que le statisticien est assujetti à une contrainte de prédiction séquentielle.

Afin de préciser mathématiquement ce qu'on entend par meilleur expert, on considère une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

On définit les pertes cumulées du statisticien et de l'expert j par

$$\widehat{L}_n = \widehat{L}_n(y_1^n) = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) \text{ et } L_{j,n} = L_{j,n}(y_1^n) = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t).$$

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Formellement, on cherche à construire des stratégies de prédictions pour le statisticien telles que pour toute suite possible d'observations $y_1, y_2, \ldots$,

$$\frac{1}{n} \max_{j=1,\ldots,N} R_{j,n} = o(1)$$

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Formellement, on cherche à construire des stratégies de prédictions pour le statisticien telles que pour toute suite possible d'observations $y_1, y_2, \ldots$,

$$\frac{1}{n} \max_{j=1,\ldots,N} R_{j,n} = o(1)$$

En général (i.e., sans condition de convexité sur ℓ), et parce que l'on se place dans le cas le pire, aucune stratégie déterministe ne pourra réaliser ce vœu.

Le contre-exemple typique est $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ et $\ell(x, y) = \mathbb{I}_{[x \neq y]}$.

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Formellement, on cherche à construire des stratégies de prédictions pour le statisticien telles que pour toute suite possible d'observations $y_1, y_2, \ldots$,

$$\frac{1}{n} \max_{j=1,\ldots,N} R_{j,n} = o(1)$$

En général (i.e., sans condition de convexité sur ℓ), et parce que l'on se place dans le cas le pire, aucune stratégie déterministe ne pourra réaliser ce vœu.

(Se placer dans le cas le pire revient à jouer contre un adversaire qui peut lire nos pensées. On ne peut le surprendre qu'en se remettant à une randomisation auxiliaire.)

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Formellement, on cherche à construire des stratégies de prédictions pour le statisticien telles que pour toute suite possible d'observations $y_1, y_2, \ldots$,

$$\frac{1}{n} \max_{j=1,\ldots,N} R_{j,n} = o(1) \quad \text{p.s.}$$

C'est pourquoi on suppose que le statisticien peut faire usage de stratégies randomisées.

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Formellement, on cherche à construire des stratégies de prédictions pour le statisticien telles que pour toute suite possible d'observations $y_1, y_2, \ldots$,

$$\frac{1}{n} \max_{j=1,\ldots,N} R_{j,n} = o(1)$$

C'est pourquoi on suppose que le statisticien peut faire usage de stratégies randomisées.

Lorsque l'on aura des hypothèses de convexité, on pourra ne recourir à aucune randomisation et agréger les avis des experts, par exemple pour la régression linéaire séquentielle.

Regret

Le regret est défini comme la différence de ces pertes cumulées,

$$R_{j,n} = R_{j,n}(y_1^n) = \widehat{L}_n - L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Formellement, on cherche à construire des stratégies de prédictions pour le statisticien telles que pour toute suite possible d'observations $y_1, y_2, \ldots$,

$$\frac{1}{n} \max_{j=1,\ldots,N} R_{j,n} = o(1)$$

C'est pourquoi on suppose que le statisticien peut faire usage de stratégies randomisées.

En revanche, dans le cas d'un déplacement en voiture dans un réseau de routes, aucune agrégation n'est possible. La randomisation permet d'"agréger en espérance".

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,
- une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts.

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,
- une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts.

La prédiction est formée en tirant un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$,

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,
- une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts.

La prédiction est formée en tirant un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$,

$$\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$$

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,
- une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts.

La prédiction est formée en tirant un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$,

$$\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$$

Les observations peuvent être indépendantes des prédictions (en statistique) ou choisies par un adversaire réagissant à nos prédictions (en théorie des jeux).

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,
- une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts.

La prédiction est formée en tirant un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$,

$$\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$$

Les observations peuvent être indépendantes des prédictions (en statistique) ou choisies par un adversaire réagissant à nos prédictions (en théorie des jeux).

Dans ce dernier cas, l'adversaire a également une stratégie (déterministe), y_t est la réalisation d'une variable aléatoire Y_t dépendant de $I_1, \ldots, I_{t-1}$.

Prédiction randomisée

Une stratégie randomisée est une suite de fonctions

- qui associent aux observations passées y_1^{t-1} et aux avis passés et présents $f_{j,s}$, $s \leqslant t$,
- une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts.

La prédiction est formée en tirant un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$,

$$\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$$

Les observations peuvent être indépendantes des prédictions (en statistique) ou choisies par un adversaire réagissant à nos prédictions (en théorie des jeux).

Dans ce dernier cas, l'adversaire a également une stratégie (déterministe), y_t est la réalisation d'une variable aléatoire Y_t dépendant de $I_1, \ldots, I_{t-1}$.

Le problème de prédiction séquentielle peut être vu comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots, n$,

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots, n$,

- l'adversaire choisit et annonce les prédictions des experts $f_{1,t}, \ldots, f_{N,t} \in \mathcal{X}$, le statisticien en prend connaissance ;

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots, n$,

- l'adversaire choisit et annonce les prédictions des experts $f_{1,t}, \ldots, f_{N,t} \in \mathcal{X}$, le statisticien en prend connaissance ;
- le statisticien choisit une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts, tire secrètement un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$, et prédit secrètement $\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$;

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots, n$,

- l'adversaire choisit et annonce les prédictions des experts $f_{1,t}, \ldots, f_{N,t} \in \mathcal{X}$, le statisticien en prend connaissance ;
- le statisticien choisit une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts, tire secrètement un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$, et prédit secrètement $\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$;
- simultanément, l'adversaire choisit en secret l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$;

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots, n$,

- l'adversaire choisit et annonce les prédictions des experts $f_{1,t}, \ldots, f_{N,t} \in \mathcal{X}$, le statisticien en prend connaissance ;
- le statisticien choisit une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts, tire secrètement un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$, et prédit secrètement $\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$;
- simultanément, l'adversaire choisit en secret l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$;
- l'observation y_t et la prédiction $\widehat{p}_t$ sont toutes deux rendues publiques, et les pertes peuvent alors être calculées.

Le jeu (répété) de prédiction

Paramètres : ensemble de prédictions $\mathcal{X}$ et d'observations $\mathcal{Y}$, N experts, n tours de jeu ($n = \infty$ est une valeur possible).

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots, n$,

- l'adversaire choisit et annonce les prédictions des experts $f_{1,t}, \ldots, f_{N,t} \in \mathcal{X}$, le statisticien en prend connaissance ;
- le statisticien choisit une probabilité $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{N,t})$ sur les experts, tire secrètement un expert I_t selon $\boldsymbol{p}_t$, et prédit secrètement $\widehat{p}_t = f_{I_t,t}$;
- simultanément, l'adversaire choisit en secret l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$;
- l'observation y_t et la prédiction $\widehat{p}_t$ sont toutes deux rendues publiques, et les pertes peuvent alors être calculées.

Borne générale $\sqrt{n}$ sur le regret en information complète

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

On note $\mathbb{E}_t$ l'espérance conditionnelle par rapport à l'information procurée par les tours $1, \ldots, t-1$,

$$\mathbb{E}_t \left[\ell(f_{I_t,t}, y_t) \right] = \sum_{i=1}^{N} p_{i,t} \ell(f_{i,t}, y_t) = \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t)$$

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\dots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\dots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

On note $\mathbb{E}_t$ l'espérance conditionnelle par rapport à l'information procurée par les tours $1, \dots, t-1$,

$$\mathbb{E}_t \left[\ell(f_{I_t,t}, y_t) \right] = \sum_{i=1}^{N} p_{i,t} \ell(f_{i,t}, y_t) = \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t)$$

Un argument de martingales montre que, sous de bonnes hypothèses,

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) = o_{\mathbb{P}}(n)$$

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, à valeurs dans $[0, B]$.

L'inégalité d'Hoeffding–Azuma assure qu'avec probabilité au moins $1 - \delta$,

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \leqslant B \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{1}{\delta}}$$

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, à valeurs dans $[0, B]$.

L'inégalité d'Hoeffding–Azuma assure qu'avec probabilité au moins $1-\delta$,

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \leqslant B\sqrt{\frac{n}{2}\ln\frac{1}{\delta}}$$

(Le lemme de Borel–Cantelli implique alors que, presque sûrement, il existe un n_0 tel que

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n \leqslant B\sqrt{\frac{n}{2}\ln n}$$

pour tout $n \geqslant n_0$.)

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, à valeurs dans $[0, B]$.

L'inégalité d'Hoeffding–Azuma assure qu'avec probabilité au moins $1 - \delta$,

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \leqslant B\sqrt{\frac{n}{2}\ln\frac{1}{\delta}}$$

(La version maximale de l'inégalité d'Hoeffding–Azuma associée au lemme de Borel–Cantelli conduit même à l'existence p.s. d'un n_0 tel que

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n \leqslant \square\, B\sqrt{n \ln\ln n}$$

pour tout $n \geqslant n_0$.)

Regret vs. regret en espérance

On cherche à minimiser le regret

$$\widehat{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

où I_t est tiré selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, à valeurs dans $[0, B]$.

L'inégalité d'Hoeffding–Azuma assure qu'avec probabilité au moins $1-\delta$,

$$\widehat{L}_n - \overline{L}_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \leqslant B\sqrt{\frac{n}{2}\ln\frac{1}{\delta}}$$

La moralité, c'est qu'il suffit de se concentrer sur le regret en espérance,

$$\overline{L}_n - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

Pondération exponentielle (1)

L'idée est d'assigner une plus grande probabilité aux experts qui ont les meilleurs résultats.

Ce faisant, on obtient une version régularisée de la stratégie déterministe qui consisterait à prédire comme le meilleur expert courant – stratégie déterministe qui bien évidemment échoue en général...

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

Cette stratégie, appelée algorithme de prédiction par pondération exponentielle a été introduite par
- Vovk ’90,
- Littlestone et Warmuth ’94.

Voir également
- Fudenberg et Levine ’95,
- Cesa-Bianchi, Freund, Helmbold, Haussler, Schapire et Warmuth ’97,
- Cesa-Bianchi et Lugosi ’99.

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, disons $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, B]$.

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, disons $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, B]$. Il est désormais bien connu que pour toute stratégie de l'adversaire, le regret en espérance de cette stratégie est borné par

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, disons $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, B]$. Il est désormais bien connu que pour toute stratégie de l'adversaire, le regret en espérance de cette stratégie est borné par

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t) \leqslant \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta n}{8} B^2$$

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, disons $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, B]$. Il est désormais bien connu que pour toute stratégie de l'adversaire, le regret en espérance de cette stratégie est borné par

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t) \leqslant \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta n}{8} B^2 = B \sqrt{\frac{n}{2} \ln N}$$

pour $\eta = B^{-1}\sqrt{8 \ln N / n}$.

Pondération exponentielle (1)

La pondération par des poids exponentiels est une stratégie efficace, quoique très simple ; $\boldsymbol{p}_1$ est uniforme et pour $t \geqslant 2$ et $i = 1, \ldots, N$,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)} = \frac{\exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta L_{j,t-1}\right)}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre à préciser.

On suppose que la fonction de perte ℓ est bornée, disons $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, B]$. Il est désormais bien connu que pour toute stratégie de l'adversaire, le regret en espérance de cette stratégie est borné par

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t) \leqslant \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta n}{8} B^2 = B \sqrt{\frac{n}{2} \ln N}$$

pour $\eta = B^{-1}\sqrt{8 \ln N / n}$.

Une mise au point sera nécessaire pour le choix de η.

Pondération exponentielle (2)

Le point-clé de la preuve est l'utilisation du lemme de Hoeffding :

Lemme. Une variable aléatoire X, $-B \leqslant X \leqslant 0$, vérifie, pour tout $s > 0$,

$$s\mathbb{E}[X] \leqslant \log \mathbb{E}\left[e^{sX}\right] \leqslant s\mathbb{E}[X] + \frac{s^2}{8}B^2 \, .$$

Pondération exponentielle (2)

On rappelle que l'algorithme choisit $p_{i,t} = w_{i,t}/W_t$, où $W_t = w_{1,t} + \ldots + w_{N,t}$, $w_{i,1} = 1$, et pour $t \geqslant 2$,

$$w_{i,t} = \exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right) = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell\left(f_{i,s}, y_s\right)\right)$$

Pondération exponentielle (2)

On rappelle que l'algorithme choisit $p_{i,t} = w_{i,t}/W_t$, où $W_t = w_{1,t} + \ldots + w_{N,t}$, $w_{i,1} = 1$, et pour $t \geqslant 2$,

$$w_{i,t} = \exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right) = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell\left(f_{i,s}, y_s\right)\right)$$

D'une part,

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_1} \geqslant \ln \frac{\max_{j=1,\ldots,N} w_{j,n+1}}{N} = -\eta \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} - \ln N$$

Pondération exponentielle (2)

On rappelle que l'algorithme choisit $p_{i,t} = w_{i,t}/W_t$, où $W_t = w_{1,t} + \ldots + w_{N,t}$, $w_{i,1} = 1$, et pour $t \geqslant 2$,

$$w_{i,t} = \exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right) = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell\left(f_{i,s}, y_s\right)\right)$$

D'une part,

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_1} \geqslant \ln \frac{\max_{j=1,\ldots,N} w_{j,n+1}}{N} = -\eta \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} - \ln N$$

D'autre part, pour chaque $t = 1, \ldots, n$,

$$\ln \frac{W_{t+1}}{W_t} = \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} e^{-\eta \ell(f_{i,t}, y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} w_{j,t-1}} = \ln \sum_{i=1}^{N} p_{i,t} e^{-\eta \ell(f_{i,t}, y_t)}$$

Pondération exponentielle (2)

On rappelle que l'algorithme choisit $p_{i,t} = w_{i,t}/W_t$, où $W_t = w_{1,t} + \ldots + w_{N,t}$, $w_{i,1} = 1$, et pour $t \geqslant 2$,

$$w_{i,t} = \exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right) = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell\left(f_{i,s}, y_s\right)\right)$$

D'une part,

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_1} \geqslant \ln \frac{\max_{j=1,\ldots,N} w_{j,n+1}}{N} = -\eta \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} - \ln N$$

D'autre part, pour chaque $t = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \ln \frac{W_{t+1}}{W_t} = \ln \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} e^{-\eta \ell(f_{i,t}, y_t)}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} \quad &= \quad \ln \sum_{i=1}^N p_{i,t} e^{-\eta \ell(f_{i,t}, y_t)} \\ &\leqslant \quad -\eta \sum_{i=1}^N p_{i,t} \ell\left(f_{i,t}, y_t\right) + \frac{\eta^2}{8} B^2 \end{aligned}$$

Pondération exponentielle (2)

On rappelle que l'algorithme choisit $p_{i,t} = w_{i,t}/W_t$, où $W_t = w_{1,t} + \ldots + w_{N,t}$, $w_{i,1} = 1$, et pour $t \geqslant 2$,

$$w_{i,t} = \exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right) = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell\left(f_{i,s}, y_s\right)\right)$$

D'une part,

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_1} \geqslant \ln \frac{\max_{j=1,\ldots,N} w_{j,n+1}}{N} = -\eta \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} - \ln N$$

D'autre part, pour chaque $t = 1, \ldots, n$,

$$\ln \frac{W_{t+1}}{W_t} \leqslant -\eta \sum_{i=1}^{N} p_{i,t} \ell\left(f_{i,t}, y_t\right) + \frac{\eta^2}{8} B^2 = -\eta\, \ell\left(\boldsymbol{p}_t, y_t\right) + \frac{\eta^2}{8} B^2$$

Pondération exponentielle (2)

On rappelle que l'algorithme choisit $p_{i,t} = w_{i,t}/W_t$, où $W_t = w_{1,t} + \ldots + w_{N,t}$, $w_{i,1} = 1$, et pour $t \geqslant 2$,

$$w_{i,t} = \exp\left(-\eta L_{i,t-1}\right) = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell\left(f_{i,s}, y_s\right)\right)$$

D'une part,

$$\ln \frac{W_{n+1}}{W_1} \geqslant \ln \frac{\max_{j=1,\ldots,N} w_{j,n+1}}{N} = -\eta \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} - \ln N$$

D'autre part, pour chaque $t = 1, \ldots, n$,

$$\ln \frac{W_{t+1}}{W_t} \leqslant -\eta \sum_{i=1}^{N} p_{i,t} \ell\left(f_{i,t}, y_t\right) + \frac{\eta^2}{8} B^2 = -\eta\, \ell\left(\boldsymbol{p}_t, y_t\right) + \frac{\eta^2}{8} B^2$$

On conclut en sommant selon $t = 1, \ldots, n$ et en combinant la borne supérieure ainsi obtenue avec la borne inférieure,

$$\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n} \leqslant \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta n}{8} B^2$$

Remarques et mises au point

Choix de η :

On peut faire usage d'un “doubling trick”

Remarques et mises au point

Choix de η :

On peut faire usage d'un "doubling trick" ou utiliser toute l'information disponible et faire dépendre η du temps,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)}$$

Remarques et mises au point

Choix de η :

On peut faire usage d'un "doubling trick" ou utiliser toute l'information disponible et faire dépendre η du temps,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)}$$

avec $\eta_t = B^{-1}\sqrt{8 \ln N/(t-1)}$.

Remarques et mises au point

Choix de η :

On peut faire usage d'un "doubling trick" ou utiliser toute l'information disponible et faire dépendre η du temps,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)}$$

avec $\eta_t = B^{-1}\sqrt{8 \ln N/(t-1)}$.

Auer, Cesa-Bianchi et Gentile '02 montrent que le regret (en espérance) de cette stratégie est plus petit que $B\left(1 + 2\sqrt{(n/2)\ln N}\right)$.

Remarques et mises au point

Choix de η :

On peut faire usage d'un "doubling trick" ou utiliser toute l'information disponible et faire dépendre η du temps,

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(-\eta_t \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)}$$

avec $\eta_t = B^{-1}\sqrt{8 \ln N/(t-1)}$.

Auer, Cesa-Bianchi et Gentile '02 montrent que le regret (en espérance) de cette stratégie est plus petit que $B\left(1 + 2\sqrt{(n/2)\ln N}\right)$.

Autres fonctions de poids :

On peut éviter ces problèmes de choix de paramètre en considérant d'autre fonctions de poids, par exemple des poids polynômiaux $x \mapsto (\max\{x, 0\})^p = x_+^p$, pour $p \geqslant 1$.

Remarques et mises au point

Autres fonctions de poids :

On peut éviter ces problèmes de choix de paramètre en considérant d'autre fonctions de poids, par exemple des poids polynômiaux $x \mapsto (\max\{x, 0\})^p = x_+^p$, pour $p \geqslant 1$.

Remarques et mises au point

Autres fonctions de poids :

On peut éviter ces problèmes de choix de paramètre en considérant d'autre fonctions de poids, par exemple des poids polynômiaux $x \mapsto (\max\{x, 0\})^p = x_+^p$, pour $p \geqslant 1$.

Plus précisément, au lieu de

$$p_{i,t} = \frac{\exp\left(\eta\left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(\eta\left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)\right)}$$

Remarques et mises au point

Autres fonctions de poids :

On peut éviter ces problèmes de choix de paramètre en considérant d'autre fonctions de poids, par exemple des poids polynômiaux $x \mapsto (\max\{x,\,0\})^p = x_+^p$, pour $p \geqslant 1$.

Plus précisément, on prend

$$p_{i,t} = \frac{\left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)_+^p}{\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)_+^p}$$

Remarques et mises au point

Autres fonctions de poids :

On peut éviter ces problèmes de choix de paramètre en considérant d'autre fonctions de poids, par exemple des poids polynômiaux $x \mapsto (\max\{x,\, 0\})^p = x_+^p$, pour $p \geqslant 1$.

Plus précisément, on prend

$$p_{i,t} = \frac{\left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s) \right)_+^p}{\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s) \right)_+^p}$$

Cesa-Bianchi et Lugosi '03 prouvent que la stratégie ci-dessus encourt un regret plus petit que

$$B\sqrt{(p-1)nN^{2/p}} \leqslant B\sqrt{(2\ln N - 1)\, e\, n}$$

pour la valeur optimale $p = 2\ln N$.

Remarques et mises au point

Autres fonctions de poids :

On peut éviter ces problèmes de choix de paramètre en considérant d'autre fonctions de poids, par exemple des poids polynômiaux $x \mapsto (\max\{x, 0\})^p = x_+^p$, pour $p \geqslant 1$.

Plus précisément, on prend

$$p_{i,t} = \frac{\left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{i,s}, y_s)\right)_+^p}{\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{t-1} \ell(\boldsymbol{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t-1} \ell(f_{j,s}, y_s)\right)_+^p}$$

Cesa-Bianchi et Lugosi '03 prouvent que la stratégie ci-dessus encourt un regret plus petit que

$$B\sqrt{(p-1)nN^{2/p}} \leqslant B\sqrt{(2\ln N - 1)\,e\,n}$$

pour la valeur optimale $p = 2\ln N$.

Mais les stratégies avec poids exponentiels s'étendent plus facilement au cas de la prédiction avec information imparfaite – et c'est pourquoi on se concentrera sur elles dans la suite.

Ordre de grandeur minmax du regret

Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire et Warmuth ’97 exhibent une borne inférieure sur le regret en espérance.

Ordre de grandeur minmax du regret

Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire et Warmuth ’97 exhibent une borne inférieure sur le regret en espérance.

Théorème. Pour $\mathcal{Y} = [0,1]$, il existe une fonction de perte $\ell : \mathbb{N} \times \mathcal{Y} \to \{0,1\}$ et deux constantes $\gamma, c > 0$

Ordre de grandeur minmax du regret

Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire et Warmuth ’97 exhibent une borne inférieure sur le regret en espérance.

Théorème. Pour $\mathcal{Y} = [0,1]$, il existe une fonction de perte $\ell : \mathbb{N} \times \mathcal{Y} \to \{0,1\}$ et deux constantes $\gamma, c > 0$ telles que pour tous $N \geqslant 2$, $n \geqslant \gamma \ln N$ et toute stratégie du statisticien face aux experts constants $f_{j,t} \equiv j$,

$$\sup_{y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right) \geqslant c\sqrt{n \ln N} \,.$$

Ordre de grandeur minmax du regret

Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire et Warmuth ’97 exhibent une borne inférieure sur le regret en espérance.

Théorème. Pour $\mathcal{Y} = [0,1]$, il existe une fonction de perte $\ell : \mathbb{N} \times \mathcal{Y} \to \{0,1\}$ et deux constantes $\gamma,\, c > 0$ telles que pour tous $N \geqslant 2$, $n \geqslant \gamma \ln N$ et toute stratégie du statisticien face aux experts constants $f_{j,t} \equiv j$,

$$\sup_{y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right) \geqslant c\sqrt{n \ln N}\,.$$

Eléments de preuve :

- $\ell(i,y)$ est le i-ème élément du développement dyadique de y,
- on prouve une inégalité plus forte dans laquelle le supremum est remplacé par une probabilité sur les suites possibles d’observations,
- cette inégalité étant obtenue ou bien par application d’arguments de limite centrale, ou bien par lemme de Fano.

Ordre de grandeur minmax du regret

Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire et Warmuth ’97 exhibent une borne inférieure sur le regret en espérance.

Théorème. Pour $\mathcal{Y} = [0,1]$, il existe une fonction de perte $\ell : \mathbb{N} \times \mathcal{Y} \to \{0,1\}$ et deux constantes $\gamma,\, c > 0$ telles que pour tous $N \geqslant 2$, $n \geqslant \gamma \ln N$ et toute stratégie du statisticien face aux experts constants $f_{j,t} \equiv j$,

$$\sup_{y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right) \geqslant c\sqrt{n \ln N}\,.$$

Si on autorise ℓ à dépendre de N, alors ℓ pourra être pris de la forme $\ell : \{1,\ldots,N\} \times \{0,1\}^N \to \{0,1\}$.

Ordre de grandeur minmax du regret

Cesa-Bianchi, Freund, Haussler, Helmbold, Schapire et Warmuth ’97 exhibent une borne inférieure sur le regret en espérance.

Théorème. Pour $\mathcal{Y} = [0,1]$, il existe une fonction de perte $\ell : \mathbb{N} \times \mathcal{Y} \to \{0,1\}$ et deux constantes $\gamma, c > 0$ telles que pour tous $N \geqslant 2$, $n \geqslant \gamma \ln N$ et toute stratégie du statisticien face aux experts constants $f_{j,t} \equiv j$,

$$\sup_{y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right) \geqslant c\sqrt{n \ln N}\,.$$

Si on autorise ℓ à dépendre de N, alors ℓ pourra être pris de la forme $\ell : \{1,\ldots,N\} \times \{0,1\}^N \to \{0,1\}$.

L’inégalité d’Hoeffding–Azuma montre ici encore que la borne inférieure vaut également pour le regret (inconditionnel).

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

En définissant $\ell(i, y)$ comme le i-ème élément du développement dyadique de y, on peut construire N probabilités

$$\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_N$$

sur les suites $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots,) \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, telles que, sous $\mathbb{P}_j$,

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

En définissant $\ell(i, y)$ comme le i-ème élément du développement dyadique de y, on peut construire N probabilités

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_N$$

sur les suites $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots,) \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, telles que, sous $\mathbb{P}_j$,

- les $\ell(k, Y_t)$ sont indépendantes (pour tous k et t)

Prédire une suite individuelle

Information complète

Information imparfaite

Agrégation séquentielle

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

En définissant $\ell(i, y)$ comme le i-ème élément du développement dyadique de y, on peut construire N probabilités

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_N$$

sur les suites $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots,) \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, telles que, sous $\mathbb{P}_j$,

- les $\ell(k, Y_t)$ sont indépendantes (pour tous k et t)
- pour tout t, $\ell(j, Y_t)$ admet une loi de Bernoulli de paramètre $1/2 - \varepsilon$,

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

En définissant $\ell(i,y)$ comme le i-ème élément du développement dyadique de y, on peut construire N probabilités

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_N$$

sur les suites $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots,) \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, telles que, sous $\mathbb{P}_j$,

- les $\ell(k, Y_t)$ sont indépendantes (pour tous k et t)
- pour tout t, $\ell(j, Y_t)$ admet une loi de Bernoulli de paramètre $1/2 - \varepsilon$,
- les $\ell(k, Y_t)$, $k \neq j$, suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

En définissant $\ell(i,y)$ comme le i-ème élément du développement dyadique de y, on peut construire N probabilités

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_N$$

sur les suites $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots,) \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, telles que, sous $\mathbb{P}_j$,

- les $\ell(k, Y_t)$ sont indépendantes (pour tous k et t)
- pour tout t, $\ell(j, Y_t)$ admet une loi de Bernoulli de paramètre $1/2 - \varepsilon$,
- les $\ell(k, Y_t)$, $k \neq j$, suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

On utilise alors que le cas le pire est pire que le cas moyen,

$$\sup_{y_1^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{j=1,\ldots,N} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right)$$

$$\geqslant \max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

On utilise alors que le cas le pire est pire que le cas moyen,

$$\sup_{y_1^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{j=1,\ldots,N} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right)$$

$$\geqslant \max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

On utilise alors que le cas le pire est pire que le cas moyen,

$$\sup_{y_1^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{j=1,\ldots,N} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right)$$

$$\geqslant \max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

Or, pour tout t, $\mathbb{E}_j \ell(j, y_t) = 1/2 - \varepsilon$ et

$$\mathbb{E}_j \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) = 1/2 - \varepsilon\, \mathbb{E}_j\, p_{j,t} = 1/2 - \varepsilon\, \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right]$$

où $\mathbb{P}_A$ désigne la randomisation auxiliaire utilisée par le statisticien.

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

On utilise alors que le cas le pire est pire que le cas moyen,

$$\sup_{y_1^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{j=1,\ldots,N} \left(\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right)$$

$$\geqslant \max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

Or, pour tout t, $\mathbb{E}_j \ell(j, y_t) = 1/2 - \varepsilon$ et

$$\mathbb{E}_j \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) = 1/2 - \varepsilon \, \mathbb{E}_j \, p_{j,t} = 1/2 - \varepsilon \, \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right]$$

où $\mathbb{P}_A$ désigne la randomisation auxiliaire utilisée par le statisticien. Ainsi,

$$\max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\ldots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\ldots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\dots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\dots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\dots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\dots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Le lemme de Fano énonce que pour N probabilités $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_N$ et toute partition de l'espace probabilisé Ω en $\Omega_1, \dots, \Omega_N$,

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\ldots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Le lemme de Fano énonce que pour N probabilités $\mathbb{Q}_1, \ldots, \mathbb{Q}_N$ et toute partition de l'espace probabilisé Ω en $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$,

$$\min_{j=1,\ldots,N} \mathbb{Q}_j(\Omega_j) \leqslant \max \left\{ \frac{\overline{K}}{\ln(N-1)}, \, \frac{e}{e+1} \right\}$$

où

$$\overline{K} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^{N} \mathcal{K}\left(\mathbb{Q}_i, \, \mathbb{Q}_1\right)$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\dots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\dots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\dots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\dots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Ici,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \leqslant \max \left\{ \frac{\overline{K}}{\ln(N-1)}, \frac{e}{e+1} \right\}$$

où

$$\overline{K} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^{N} \mathcal{K} \left(\mathbb{P}_i \otimes \mathbb{P}_A, \, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_A \right)$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\ldots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Ici,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \leqslant \max \left\{ \frac{\overline{K}}{\ln(N-1)}, \, \frac{e}{e+1} \right\}$$

où

$$\overline{K} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^{N} \mathcal{K}\left(\mathbb{P}_i, \, \mathbb{P}_1 \right)$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\dots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\dots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\dots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\dots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Ici,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \leqslant \max \left\{ \frac{\overline{K}}{\ln(N-1)}, \, \frac{e}{e+1} \right\}$$

où

$$\overline{K} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^{N} \mathcal{K}\left(\mathbb{P}_i, \, \mathbb{P}_1 \right) \leqslant \square \, n\varepsilon^2$$

Preuve plus détaillée de la borne inférieure

Ainsi,

$$\max_{j=1,\ldots,N} \mathbb{E}_j \left[\sum_{t=1,\ldots,n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \sum_{t=1,\ldots,n} \ell(j, y_t) \right]$$

$$\geqslant n\varepsilon \max_{j=1,\ldots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right)$$

Ici,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \leqslant \max \left\{ \frac{\overline{K}}{\ln(N-1)}, \, \frac{e}{e+1} \right\}$$

où

$$\overline{K} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^{N} \mathcal{K}\left(\mathbb{P}_i, \, \mathbb{P}_1 \right) \leqslant \Box \, n\varepsilon^2$$

de sorte que, pour ε bien choisi,

$$n\varepsilon \max_{j=1,\ldots,N} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{P}_j \otimes \mathbb{P}_A \left[I_t = j \right] \right) \geqslant n\varepsilon \left(1 - \Box \, \frac{n\varepsilon^2}{\ln(N-1)} \right)$$

et $\varepsilon = \Box \sqrt{\ln(N-1)}/\sqrt{n}$ conclut la preuve.

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Ainsi, Freund et Schapire '97 remplacent $B\sqrt{n \ln N}$ par la quantité, parfois bien plus petite, $\sqrt{B L_n^* \ln N}$, où $L_n^* = \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n}$ est la perte du meilleur expert.

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Ainsi, Freund et Schapire '97 remplacent $B\sqrt{n \ln N}$ par la quantité, parfois bien plus petite, $\sqrt{BL_n^* \ln N}$, où $L_n^* = \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n}$ est la perte du meilleur expert.

Cesa-Bianchi, Mansour et Stoltz '05 montrent que le regret (en espérance) d'une variante de l'algorithme de prédiction par pondération exponentielle est borné par $\sqrt{V_n \ln N}$, où V_n est la somme des variances conditionnelles des pertes,

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Ainsi, Freund et Schapire '97 remplacent $B\sqrt{n \ln N}$ par la quantité, parfois bien plus petite, $\sqrt{B L_n^* \ln N}$, où $L_n^* = \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n}$ est la perte du meilleur expert.

Cesa-Bianchi, Mansour et Stoltz '05 montrent que le regret (en espérance) d'une variante de l'algorithme de prédiction par pondération exponentielle est borné par $\sqrt{V_n \ln N}$, où V_n est la somme des variances conditionnelles des pertes,

$$V_n = \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} p_{j,t} \bigl(\ell(f_{j,t}, y_t) - \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t)\bigr)^2 \quad \bigl(\leqslant B^2 n\bigr)$$

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Ainsi, Freund et Schapire '97 remplacent $B\sqrt{n \ln N}$ par la quantité, parfois bien plus petite, $\sqrt{B L_n^* \ln N}$, où $L_n^* = \min_{j=1,\dots,N} L_{j,n}$ est la perte du meilleur expert.

Cesa-Bianchi, Mansour et Stoltz '05 montrent que le regret (en espérance) d'une variante de l'algorithme de prédiction par pondération exponentielle est borné par $\sqrt{V_n \ln N}$, où V_n est la somme des variances conditionnelles des pertes,

$$V_n = \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} p_{j,t} \left(\ell(f_{j,t}, y_t) - \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \right)^2 \quad \left(\leqslant B^2 n \right)$$

L'inégalité de Bernstein montre que la différence entre le regret inconditionnel et le regret en espérance est essentiellement du même ordre de grandeur, $\sqrt{V_n \ln(1/\delta)} + B \ln(1/\delta)$.

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Ainsi, Freund et Schapire '97 remplacent $B\sqrt{n \ln N}$ par la quantité, parfois bien plus petite, $\sqrt{BL_n^* \ln N}$, où $L_n^* = \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n}$ est la perte du meilleur expert.

Cesa-Bianchi, Mansour et Stoltz '05 montrent alors que la borne en $\sqrt{V_n}$ en implique d'autres, notamment une borne pour les pertes petites ou grandes, de la forme

$$\sqrt{\frac{L_n^* \left(Bn - L_n^*\right)}{n} \ln N}$$

Résumé et perspectives

La vitesse $B\sqrt{n \ln N}$ n'est pas améliorable en général. On peut cependant essayer de la préciser, en établissant des bornes sur le regret dépendant des données.

Ainsi, Freund et Schapire '97 remplacent $B\sqrt{n \ln N}$ par la quantité, parfois bien plus petite, $\sqrt{BL_n^* \ln N}$, où $L_n^* = \min_{j=1,\ldots,N} L_{j,n}$ est la perte du meilleur expert.

Cesa-Bianchi, Mansour et Stoltz '05 montrent alors que la borne en $\sqrt{V_n}$ en implique d'autres, notamment une borne pour les pertes petites ou grandes, de la forme

$$\sqrt{\frac{L_n^* \left(Bn - L_n^*\right)}{n} \ln N}$$

Enfin, au passage, ils traitent l'adaptation en n mais aussi en B.

Prédiction avec information imparfaite

Ajustement séquentiel des prix de vente

Un internaute ouvre une boutique de vente de T-shirts en ligne.
Les clients se connectent un par un à son site.

Ajustement séquentiel des prix de vente

Un internaute ouvre une boutique de vente de T-shirts en ligne. Les clients se connectent un par un à son site.

Le vendeur propose un prix ajusté au cours du temps : pour le t-ième client, le prix est $I_t \in \mathcal{X} = [0, 1]$.

Ajustement séquentiel des prix de vente

Un internaute ouvre une boutique de vente de T-shirts en ligne. Les clients se connectent un par un à son site.

Le vendeur propose un prix ajusté au cours du temps : pour le t-ième client, le prix est $I_t \in \mathcal{X} = [0,1]$.

Chacun des clients a en tête un prix maximal $y_t \in \mathcal{Y} = [0,1]$ qu'il est prêt à payer, mais qu'il ne dévoile pas au vendeur.

Ajustement séquentiel des prix de vente

Un internaute ouvre une boutique de vente de T-shirts en ligne. Les clients se connectent un par un à son site.

Le vendeur propose un prix ajusté au cours du temps : pour le t-ième client, le prix est $I_t \in \mathcal{X} = [0, 1]$.

Chacun des clients a en tête un prix maximal $y_t \in \mathcal{Y} = [0, 1]$ qu'il est prêt à payer, mais qu'il ne dévoile pas au vendeur.

Lorsque $y_t \geqslant I_t$, le client achète le produit et le vendeur encourt une "perte" (manque à gagner) $y_t - I_t$.

Ajustement séquentiel des prix de vente

Un internaute ouvre une boutique de vente de T-shirts en ligne. Les clients se connectent un par un à son site.

Le vendeur propose un prix ajusté au cours du temps : pour le t-ième client, le prix est $I_t \in \mathcal{X} = [0,1]$.

Chacun des clients a en tête un prix maximal $y_t \in \mathcal{Y} = [0,1]$ qu'il est prêt à payer, mais qu'il ne dévoile pas au vendeur.

Lorsque $y_t \geqslant I_t$, le client achète le produit et le vendeur encourt une “perte” (manque à gagner) $y_t - I_t$.

Lorsque $y_t < I_t$, le client n'achète rien et la perte du vendeur est de $c \in [0,1]$ (charges fixes).

Ajustement séquentiel des prix de vente

Un internaute ouvre une boutique de vente de T-shirts en ligne. Les clients se connectent un par un à son site.

Le vendeur propose un prix ajusté au cours du temps : pour le t-ième client, le prix est $I_t \in \mathcal{X} = [0, 1]$.

Chacun des clients a en tête un prix maximal $y_t \in \mathcal{Y} = [0, 1]$ qu'il est prêt à payer, mais qu'il ne dévoile pas au vendeur.

Lorsque $y_t \geqslant I_t$, le client achète le produit et le vendeur encourt une "perte" (manque à gagner) $y_t - I_t$.

Lorsque $y_t < I_t$, le client n'achète rien et la perte du vendeur est de $c \in [0, 1]$ (charges fixes).

La fonction de perte du vendeur est ainsi

$$\ell(I_t, y_t) = (y_t - I_t)\,\mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t} + c\,\mathbb{I}_{y_t < I_t}$$

mais seules les répercussions suivantes sont portées à sa connaissance,

$$h(I_t, y_t) = \mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t}$$

Ajustement séquentiel des prix de vente

La fonction de perte du vendeur est ainsi

$$\ell(I_t, y_t) = (y_t - I_t)\,\mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t} + c\,\mathbb{I}_{y_t < I_t}$$

mais seules les répercussions suivantes sont portées à sa connaissance,

$$h(I_t, y_t) = \mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t}$$

Ajustement séquentiel des prix de vente

La fonction de perte du vendeur est ainsi

$$\ell(I_t, y_t) = (y_t - I_t)\,\mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t} + c\,\mathbb{I}_{y_t < I_t}$$

mais seules les répercussions suivantes sont portées à sa connaissance,

$$h(I_t, y_t) = \mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t}$$

On rappelle que les valeurs y_t sont arbitraires (et sont même autorisées à dépendre des actions passées du vendeur). On peut ainsi tenir compte de l'influence de notre politique tarifaire et publicitaire sur les échelles de prix des clients.

Ajustement séquentiel des prix de vente

La fonction de perte du vendeur est ainsi

$$\ell(I_t, y_t) = (y_t - I_t)\,\mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t} + c\,\mathbb{I}_{y_t < I_t}$$

mais seules les répercussions suivantes sont portées à sa connaissance,

$$h(I_t, y_t) = \mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t}$$

Notre stratégie sera dynamique, et nous nous comparerons à tous ceux de nos concurrents qui utilisent des stratégies classiques, avec études de marché.

Ajustement séquentiel des prix de vente

La fonction de perte du vendeur est ainsi

$$\ell(I_t, y_t) = (y_t - I_t)\,\mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t} + c\,\mathbb{I}_{y_t < I_t}$$

mais seules les répercussions suivantes sont portées à sa connaissance,

$$h(I_t, y_t) = \mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t}$$

Notre stratégie sera dynamique, et nous nous comparerons à tous ceux de nos concurrents qui utilisent des stratégies classiques, avec études de marché.

Ces dernières fournissent un prix (constant) $q \in [0,1]$, et c'est pourquoi nous comparons notre perte cumulée à celle du meilleur prix constant :

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{q \in [0,1]} \sum_{t=1}^{n} \ell(q, y_t)$$

Ajustement séquentiel des prix de vente

La fonction de perte du vendeur est ainsi

$$\ell(I_t, y_t) = (y_t - I_t)\,\mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t} + c\,\mathbb{I}_{y_t < I_t}$$

mais seules les répercussions suivantes sont portées à sa connaissance,

$$h(I_t, y_t) = \mathbb{I}_{y_t \geqslant I_t}$$

Notre stratégie sera dynamique, et nous nous comparerons à tous ceux de nos concurrents qui utilisent des stratégies classiques, avec études de marché.

Ces dernières fournissent un prix (constant) $q \in [0,1]$, et c'est pourquoi nous comparons notre perte cumulée à celle du meilleur prix constant :

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{q \in [0,1]} \sum_{t=1}^{n} \ell(q, y_t)$$

Il s'agit, dans la vraie vie, de comparer ce regret au prix d'une étude de marché...

Modèle général

On fixe deux ensembles finis, $\mathcal{X}$, celui des prédictions, et $\mathcal{Y}$, celui des observations.

Modèle général

On fixe deux ensembles finis, $\mathcal{X}$, celui des prédictions, et $\mathcal{Y}$, celui des observations.

On introduit deux fonctions,

Modèle général

On fixe deux ensembles finis, $\mathcal{X}$, celui des prédictions, et $\mathcal{Y}$, celui des observations.

On introduit deux fonctions,

- une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, 1]$,

Modèle général

On fixe deux ensembles finis, $\mathcal{X}$, celui des prédictions, et $\mathcal{Y}$, celui des observations.

On introduit deux fonctions,

- une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, 1]$,
- une fonction de répercussion $h : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} \subset [-1, 1]$ est un ensemble fini de signaux.

Modèle général

On fixe deux ensembles finis, $\mathcal{X}$, celui des prédictions, et $\mathcal{Y}$, celui des observations.

On introduit deux fonctions,

- une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, 1]$,
- une fonction de répercussion $h : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} \subset [-1, 1]$ est un ensemble fini de signaux.

Après avoir choisi $I_t \in \mathcal{X}$, le statisticien n'a accès qu'à la répercussion $h(I_t, y_t)$ et subit une perte $\ell(I_t, y_t)$.

Modèle général

On fixe deux ensembles finis, $\mathcal{X}$, celui des prédictions, et $\mathcal{Y}$, celui des observations.

On introduit deux fonctions,

- une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0,1]$,
- une fonction de répercussion $h : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} \subset [-1,1]$ est un ensemble fini de signaux.

Après avoir choisi $I_t \in \mathcal{X}$, le statisticien n'a accès qu'à la répercussion $h(I_t, y_t)$ et subit une perte $\ell(I_t, y_t)$.

Il cherche à former ses prédictions de telle sorte que son regret vérifie

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) = o(n) \quad \text{p.s.,}$$

et ce, indépendamment de la stratégie que peut potentiellement suivre son adversaire.

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

A chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots,$

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

A chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$,

- l'adversaire choisit l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ sans la dévoiler ;

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

A chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$,

- l'adversaire choisit l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ sans la dévoiler ;
- le statisticien détermine sa probabilité $\boldsymbol{p}_t$ sur $\mathcal{X}$, et tire (en secret) sa prédiction I_t selon $\boldsymbol{p}_t$;

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

A chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$,

- l'adversaire choisit l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ sans la dévoiler ;
- le statisticien détermine sa probabilité $\boldsymbol{p}_t$ sur $\mathcal{X}$, et tire (en secret) sa prédiction I_t selon $\boldsymbol{p}_t$;
- le statisticien (resp., chacune des $x \in \mathcal{X}$) subit une perte $\ell(I_t, y_t)$ (resp., $\ell(x, y_t)$), mais aucune de ces quantités n'est dévoilée ;

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

A chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$,

- l'adversaire choisit l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ sans la dévoiler ;
- le statisticien détermine sa probabilité $\boldsymbol{p}_t$ sur $\mathcal{X}$, et tire (en secret) sa prédiction I_t selon $\boldsymbol{p}_t$;
- le statisticien (resp., chacune des $x \in \mathcal{X}$) subit une perte $\ell(I_t, y_t)$ (resp., $\ell(x, y_t)$), mais aucune de ces quantités n'est dévoilée ;
- seule la répercussion $h(I_t, y_t)$ est portée à la connaissance du statisticien.

Jeu de prédiction en information imparfaite

Le problème de prédiction séquentielle avec information imparfaite peut lui aussi être énoncé comme un jeu répété (à somme nulle) entre le statisticien et un adversaire.

A chaque tour de jeu $t = 1, 2, \ldots$,

- l'adversaire choisit l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$ sans la dévoiler ;
- le statisticien détermine sa probabilité $\boldsymbol{p}_t$ sur $\mathcal{X}$, et tire (en secret) sa prédiction I_t selon $\boldsymbol{p}_t$;
- le statisticien (resp., chacune des $x \in \mathcal{X}$) subit une perte $\ell(I_t, y_t)$ (resp., $\ell(x, y_t)$), mais aucune de ces quantités n'est dévoilée ;
- seule la répercussion $h(I_t, y_t)$ est portée à la connaissance du statisticien.

Le statisticien cherche à prédire de telle sorte que son regret vérifie

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) = o(n) \quad \text{p.s.}$$

Exemples

Puisque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont finis, on peut représenter ℓ et h par des matrices,

$$\boldsymbol{L} = \big[\ell(x,y)\big]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H} = \big[h(x,y)\big]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

Exemples

Puisque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont finis, on peut représenter ℓ et h par des matrices,

$$\boldsymbol{L} = [\ell(x,y)]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H} = [h(x,y)]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

Bandits manchots : La seule répercussion portée à la connaissance du statisticien est sa propre perte,

$$h = \ell$$

(voir Auer, Cesa-Bianchi, Freund et Schapire '02).

Exemples

Puisque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont finis, on peut représenter ℓ et h par des matrices,

$$\boldsymbol{L} = \big[\ell(x,y)\big]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H} = \big[h(x,y)\big]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

Bandits manchots : La seule répercussion portée à la connaissance du statisticien est sa propre perte,

$$h = \ell$$

(voir Auer, Cesa-Bianchi, Freund et Schapire ’02).

Dégustation de pommes : $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0,1\}$,

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemples

Puisque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont finis, on peut représenter ℓ et h par des matrices,

$$\boldsymbol{L} = \big[\ell(x,y)\big]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H} = \big[h(x,y)\big]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

Bandits manchots : La seule répercussion portée à la connaissance du statisticien est sa propre perte,

$$h = \ell$$

(voir Auer, Cesa-Bianchi, Freund et Schapire '02).

Dégustation de pommes : $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0,1\}$,

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le statisticien ne reçoit de répercussion informative que lorsqu'il choisit la première action (voir Helmbold et Panizza '97).

Exemples

Puisque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont finis, on peut représenter ℓ et h par des matrices,

$$\boldsymbol{L} = [\ell(x,y)]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H} = [h(x,y)]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

Exemples

Puisque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont finis, on peut représenter ℓ et h par des matrices,

$$\boldsymbol{L} = [\ell(x,y)]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{H} = [h(x,y)]_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

Prédiction économique en nombre d'observations :

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seul jouer la première action procure de l'information, mais fait également subir une perte maximale (voir Cesa-Bianchi, Lugosi et Stoltz '04).

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer '01.

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer ’01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir,

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer '01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir, qu'il existe une matrice $\boldsymbol{K} = [k(x,z)]$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer ’01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir, qu’il existe une matrice $\boldsymbol{K} = [k(x,z)]$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$

Ainsi,

$$\ell(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} k(x,z) h(z,y)$$

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer '01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir,

qu'il existe une matrice $\boldsymbol{K} = [k(x,z)]$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$

Ainsi,
$$\ell(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} k(x,z) h(z,y)$$

On peut alors estimer les pertes de toute prédiction $x \in \mathcal{X}$ par

$$\widetilde{\ell}(x, y_t) = \frac{k(x, I_t) h(I_t, y_t)}{p_{I_t,t}}$$

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer ’01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir, qu’il existe une matrice $\boldsymbol{K} = [k(x,z)]$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$

Ainsi,
$$\ell(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} k(x,z)h(z,y)$$

On peut alors estimer les pertes de toute prédiction $x \in \mathcal{X}$ par
$$\widetilde{\ell}(x,y_t) = \frac{k(x,I_t)h(I_t,y_t)}{p_{I_t,t}}$$

Ces estimateurs sont (conditionnellement) sans biais.

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer '01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir, qu'il existe une matrice $\boldsymbol{K} = [k(x,z)]$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$

Ainsi,
$$\ell(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} k(x,z) h(z,y)$$

On peut alors estimer les pertes de toute prédiction $x \in \mathcal{X}$ par
$$\widetilde{\ell}(x,y_t) = \frac{k(x,I_t)h(I_t,y_t)}{p_{I_t,t}}$$

Ces estimateurs sont (conditionnellement) sans biais. I_t étant tiré selon $\boldsymbol{p}_t$,

Une stratégie générale : estimation des pertes

La stratégie qui suit est inspirée de celle de Piccolboni et Schindelhauer ’01.

Elle repose sur une hypothèse structurelle, que les pertes peuvent être reconstruites à partir des répercussions, à savoir, qu’il existe une matrice $\boldsymbol{K} = [k(x,z)]$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$

Ainsi,
$$\ell(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} k(x,z)h(z,y)$$

On peut alors estimer les pertes de toute prédiction $x \in \mathcal{X}$ par
$$\widetilde{\ell}(x,y_t) = \frac{k(x,I_t)h(I_t,y_t)}{p_{I_t,t}}$$

Ces estimateurs sont (conditionnellement) sans biais. I_t étant tiré selon $\boldsymbol{p}_t$,
$$\mathbb{E}_t\left[\widetilde{\ell}(x,y_t)\right] = \sum_{z \in \mathcal{X}} p_{z,t} \frac{k(x,z)h(z,y_t)}{p_{z,t}} = \ell(x,y_t)$$

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : L, H (et K telle que $L = K\,H$) sont connues

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ (et $\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$) sont connues

Initialisation : $\widetilde{L}_{x,0} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ (et $\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$) sont connues

Initialisation : $\widetilde{L}_{x,0} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots,$

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ (et $\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$) sont connues

Initialisation : $\widetilde{L}_{x,0} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots$,

- soit $\eta_t = \square\, t^{-2/3}$ et $\gamma_t = \square\, t^{-1/3}$;

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ (et $\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$) sont connues

Initialisation : $\widetilde{L}_{x,0} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots$,

- soit $\eta_t = \square\, t^{-2/3}$ et $\gamma_t = \square\, t^{-1/3}$;
- le statisticien tire I_t dans $\mathcal{X}$ selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$ définie par

$$p_{x,t} = (1-\gamma_t)\frac{e^{-\eta_t \widetilde{L}_{x,t-1}}}{\sum_{z\in\mathcal{X}} e^{-\eta_t \widetilde{L}_{z,t-1}}} + \frac{\gamma_t}{|\mathcal{X}|} \; ;$$

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ (et $\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$) sont connues

Initialisation : $\widetilde{L}_{x,0} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots$,

- soit $\eta_t = \square\, t^{-2/3}$ et $\gamma_t = \square\, t^{-1/3}$;
- le statisticien tire I_t dans $\mathcal{X}$ selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$ définie par

$$p_{x,t} = (1-\gamma_t)\frac{e^{-\eta_t \widetilde{L}_{x,t-1}}}{\sum_{z \in \mathcal{X}} e^{-\eta_t \widetilde{L}_{z,t-1}}} + \frac{\gamma_t}{|\mathcal{X}|} \;;$$

- on met à jour les estimées cumulées, $\widetilde{L}_{x,t} = \widetilde{L}_{x,t-1} + \widetilde{\ell}(x, y_t)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$,

Une stratégie générale : poids exponentiels

Paramètres : $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ (et $\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$) sont connues

Initialisation : $\widetilde{L}_{x,0} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$

A chaque tour $t = 1, 2, \ldots$,

- soit $\eta_t = \Box\, t^{-2/3}$ et $\gamma_t = \Box\, t^{-1/3}$;
- le statisticien tire I_t dans $\mathcal{X}$ selon la probabilité $\boldsymbol{p}_t$ définie par

$$p_{x,t} = (1-\gamma_t)\frac{e^{-\eta_t \widetilde{L}_{x,t-1}}}{\sum_{z\in\mathcal{X}} e^{-\eta_t \widetilde{L}_{z,t-1}}} + \frac{\gamma_t}{|\mathcal{X}|} \; ;$$

- on met à jour les estimées cumulées, $\widetilde{L}_{x,t} = \widetilde{L}_{x,t-1} + \widetilde{\ell}(x, y_t)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, où

$$\widetilde{\ell}(x, y_t) = \frac{k(x, I_t)\, h(I_t, y_t)}{p_{I_t,t}}$$

Majoration du regret

Cesa-Bianchi, Lugosi et Stoltz ’04 améliorent les ordres de grandeur de la borne de Piccolboni et Schindelhauer ’01.

Majoration du regret

Cesa-Bianchi, Lugosi et Stoltz ’04 améliorent les ordres de grandeur de la borne de Piccolboni et Schindelhauer ’01.

Théorème. Pour toute stratégie de l’adversaire, pour tous $n \geqslant 1$ et $\delta \in [0, 1]$, et avec probabilité au moins $1 - \delta$,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \leqslant \Box \, |\mathcal{X}|^{2/3} \, n^{2/3} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}$$

(sous l’hypothèse que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{H}$).

Majoration du regret

Théorème. Pour toute stratégie de l'adversaire, pour tous $n \geqslant 1$ et $\delta \in [0,1]$, et avec probabilité au moins $1-\delta$,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \leqslant \square \, |\mathcal{X}|^{2/3} \, n^{2/3} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}$$

(sous l'hypothèse que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{H}$).

Majoration du regret

Théorème. Pour toute stratégie de l'adversaire, pour tous $n \geqslant 1$ et $\delta \in [0,1]$, et avec probabilité au moins $1-\delta$,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \leqslant \square \, |\mathcal{X}|^{2/3} \, n^{2/3} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}$$

(sous l'hypothèse que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{H}$).

Application à l'ajustement séquentiel des prix :

On divise le temps en les périodes $[2^{r-1}, 2^r - 1]$, $r = 1, 2, \ldots$, de longueur $n_r = 2^{r-1}$. On relance l'algorithme précédent au début de chaque période r,

Majoration du regret

Théorème. Pour toute stratégie de l'adversaire, pour tous $n \geqslant 1$ et $\delta \in [0,1]$, et avec probabilité au moins $1-\delta$,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \leqslant \square \, |\mathcal{X}|^{2/3} \, n^{2/3} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}$$

(sous l'hypothèse que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$).

Application à l'ajustement séquentiel des prix :

On divise le temps en les périodes $[2^{r-1}, 2^r - 1]$, $r = 1, 2, \ldots$, de longueur $n_r = 2^{r-1}$. On relance l'algorithme précédent au début de chaque période r, en discrétisant $[0,1]$ par $\{0,\, 1/N_r,\, 2/N_r, \ldots,\, 1\}$, où $N_r \sim (2^r)^{1/5}$.

Majoration du regret

Théorème. Pour toute stratégie de l'adversaire, pour tous $n \geqslant 1$ et $\delta \in [0,1]$, et avec probabilité au moins $1-\delta$,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(I_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \leqslant \Box \, |\mathcal{X}|^{2/3} \, n^{2/3} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}$$

(sous l'hypothèse que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$).

Application à l'ajustement séquentiel des prix :

On divise le temps en les périodes $[2^{r-1}, 2^r - 1]$, $r = 1, 2, \ldots$, de longueur $n_r = 2^{r-1}$. On relance l'algorithme précédent au début de chaque période r, en discrétisant $[0,1]$ par $\{0,\, 1/N_r,\, 2/N_r, \ldots, 1\}$, où $N_r \sim (2^r)^{1/5}$.

L'effet de la discrétisation est de l'ordre de $\sum_r n_r/N_r \sim n^{4/5}$, et la borne proposée par le théorème est de l'ordre de $\sum_r N_r^{2/3} n_r^{2/3} \sim n^{4/5}$.

Majoration du regret

Preuve. Tout se joue au niveau des variances (conditionnelles) des pertes.

Majoration du regret

Preuve. Tout se joue au niveau des variances (conditionnelles) des pertes. Comme $p_{x,t} \geqslant \gamma_t / |\mathcal{X}|$,

$$\mathbb{E}_t \left[\widetilde{\ell}(j, y_t)^2 \right] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{x,t} \left(\frac{k(j,x)\, s(x,y_t)}{p_{x,t}} \right)^2 \leqslant \frac{\left(|\mathcal{X}|\, \|K\|_\infty\right)^2}{\gamma_t} \sim t^{1/3}$$

Majoration du regret

Preuve. Tout se joue au niveau des variances (conditionnelles) des pertes. Comme $p_{x,t} \geqslant \gamma_t / |\mathcal{X}|$,

$$\mathbb{E}_t\left[\widetilde{\ell}(j,y_t)^2\right] = \sum_{x\in\mathcal{X}} p_{x,t}\left(\frac{k(j,x)\,s(x,y_t)}{p_{x,t}}\right)^2 \leqslant \frac{\left(|\mathcal{X}|\,\|K\|_\infty\right)^2}{\gamma_t} \sim t^{1/3}$$

de sorte que $\sqrt{V_n} \sim n^{2/3}$, où $\sqrt{V_n}$ est la racine de la somme des variances conditionnelles.

Majoration du regret

Preuve. Tout se joue au niveau des variances (conditionnelles) des pertes. Comme $p_{x,t} \geqslant \gamma_t / |\mathcal{X}|$,

$$\mathbb{E}_t\left[\widetilde{\ell}(j,y_t)^2\right] = \sum_{x\in\mathcal{X}} p_{x,t}\left(\frac{k(j,x)\,s(x,y_t)}{p_{x,t}}\right)^2 \leqslant \frac{\left(|\mathcal{X}|\,\|K\|_\infty\right)^2}{\gamma_t} \sim t^{1/3}$$

de sorte que $\sqrt{V_n} \sim n^{2/3}$, où $\sqrt{V_n}$ est la racine de la somme des variances conditionnelles.

D'une part, l'inégalité de Bernstein montre alors que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{t=1}^n \ell(I_t,y_t) - \min_{x\in\mathcal{X}}\sum_{t=1}^n \ell(x,y_t)\right)\\ &\qquad = \left(\sum_{t=1}^n \widetilde{\ell}(\boldsymbol{p}_t,y_t) - \min_{x\in\mathcal{X}}\sum_{t=1}^n \widetilde{\ell}(x,y_t)\right) + O_{\mathbb{P}}(n^{2/3})\end{aligned}$$

Majoration du regret

Preuve. Tout se joue au niveau des variances (conditionnelles) des pertes. Comme $p_{x,t} \geqslant \gamma_t / |\mathcal{X}|$,

$$\mathbb{E}_t\left[\widetilde{\ell}(j,y_t)^2\right] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{x,t} \left(\frac{k(j,x)\, s(x,y_t)}{p_{x,t}} \right)^2 \leqslant \frac{\left(|\mathcal{X}|\, \|K\|_\infty\right)^2}{\gamma_t} \sim t^{1/3}$$

de sorte que $\sqrt{V_n} \sim n^{2/3}$, où $\sqrt{V_n}$ est la racine de la somme des variances conditionnelles.

D'autre part, on a (presque !) vu que

$$\sum_{t=1}^n \widetilde{\ell}(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^n \widetilde{\ell}(x, y_t)$$

$$\leqslant \Box \sqrt{(\ln |X|) \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_t \left[\sum_{x \in \mathcal{X}} p_{x,t} \widetilde{\ell}(x,y_t)^2 \right]} \leqslant \Box\, n^{2/3}$$

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

On considère le problème de la prédiction économique en nombre d'observations,

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

On considère le problème de la prédiction économique en nombre d'observations,

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$ existe bien).

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

On considère le problème de la prédiction économique en nombre d'observations,

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$ existe bien).

On ne reçoit d'information que lorsque l'on choisit la première action, qui par ailleurs entraîne systématiquement une perte maximale.

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

On considère le problème de la prédiction économique en nombre d'observations,

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$ existe bien).

Théorème. Pour tout $n \geqslant 8$ et toute stratégie randomisée du statisticien,

$$\sup_{y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right) \geqslant \frac{n^{2/3}}{5},$$

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

On considère le problème de la prédiction économique en nombre d'observations,

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{K}$ telle que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{H}$ existe bien).

Théorème. Pour tout $n \geqslant 8$ et toute stratégie randomisée du statisticien,

$$\sup_{y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right) \geqslant \frac{n^{2/3}}{5},$$

Ceci entraîne également, via l'inégalité d'Hoeffding–Azuma, une borne inférieure pour le regret inconditionnel.

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

Preuve. On considère un adversaire oublieux, qui choisit les observations $Y_1, Y_2, \ldots$ au hasard dans $\{0,1\}$ (on note $\mathbb{P}$ la probabilité associée).

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

Preuve. On considère un adversaire oublieux, qui choisit les observations $Y_1, Y_2, \ldots$ au hasard dans $\{0,1\}$ (on note $\mathbb{P}$ la probabilité associée). Alors,

$$\sup_{y_1^n} \left(\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right)$$
$$\geqslant \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right]$$

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

Preuve. On considère un adversaire oublieux, qui choisit les observations $Y_1, Y_2, \ldots$ au hasard dans $\{0,1\}$ (on note $\mathbb{P}$ la probabilité associée). Alors,

$$\sup_{y_1^n} \left(\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right)$$

$$\geqslant \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right]$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité de Pinsker minore le membre de droite par

$$\frac{m_1}{2} + n\varepsilon \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3 m_1\, \varepsilon^2} \right) \geqslant \frac{m_1}{2} + \frac{n}{16\sqrt{3}\,\sqrt{m_1}}$$

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

Preuve. On considère un adversaire oublieux, qui choisit les observations $Y_1, Y_2, \ldots$ au hasard dans $\{0,1\}$ (on note $\mathbb{P}$ la probabilité associée). Alors,

$$\sup_{y_1^n} \left(\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right)$$
$$\geqslant \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right]$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité de Pinsker minore le membre de droite par

$$\frac{m_1}{2} + n\varepsilon \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3 m_1 \, \varepsilon^2} \right) \geqslant \frac{m_1}{2} + \frac{n}{16\sqrt{3}\,\sqrt{m_1}}$$

où m_1 désigne le nombre moyen de fois où l'action informative, qui encourt la perte maximale, a été jouée.

Optimalité : ordre de grandeur minmax du regret

Preuve. On considère un adversaire oublieux, qui choisit les observations $Y_1, Y_2, \ldots$ au hasard dans $\{0, 1\}$ (on note $\mathbb{P}$ la probabilité associée). Alors,

$$\sup_{y_1^n} \left(\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right)$$

$$\geqslant \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{x=1,2,3} \sum_{t=1}^{n} \ell(x, y_t) \right]$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité de Pinsker minore le membre de droite par

$$\frac{m_1}{2} + n\varepsilon \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3 m_1 \, \varepsilon^2} \right) \geqslant \frac{m_1}{2} + \frac{n}{16\sqrt{3}\,\sqrt{m_1}}$$

Il suffit d'étudier les variations selon la valeur de m_1. (Le dernier pas de cette preuve apparaît également dans Mertens, Sorin et Zamir '94, mais les débuts diffèrent.)

Optimalité : cette condition de reconstruction...

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{H}$ est une condition suffisante pour que le regret puisse être uniformément un $o(n)$; c'est également, en un certain sens, une condition nécessaire.

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Théorème. Tout problème de prédiction $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Théorème. Tout problème de prédiction $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$

- soit se ramène à un problème $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$ pas plus difficile, avec $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}' \, \boldsymbol{H}'$, de sorte que le regret peut être borné par $O_{\mathbb{P}}(n^{2/3})$ dans le problème originel, en appliquant la stratégie générale ;

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Théorème. Tout problème de prédiction $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$

- soit se ramène à un problème $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$ pas plus difficile, avec $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}' \, \boldsymbol{H}'$, de sorte que le regret peut être borné par $O_{\mathbb{P}}(n^{2/3})$ dans le problème originel, en appliquant la stratégie générale ;
- soit est tel qu'aucune stratégie ne peut garantir un regret uniformément en $o(n)$.

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Théorème. Tout problème de prédiction $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$

- soit se ramène à un problème $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$ pas plus difficile, avec $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}' \, \boldsymbol{H}'$, de sorte que le regret peut être borné par $O_{\mathbb{P}}(n^{2/3})$ dans le problème originel, en appliquant la stratégie générale ;
- soit est tel qu'aucune stratégie ne peut garantir un regret uniformément en $o(n)$.

Piccolboni et Schindelhauer '01 exhibent un algorithme exécutant la réduction de $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$ vers $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$.

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Théorème. Tout problème de prédiction $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$

- soit se ramène à un problème $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$ pas plus difficile, avec $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}' \, \boldsymbol{H}'$, de sorte que le regret peut être borné par $O_{\mathbb{P}}(n^{2/3})$ dans le problème originel, en appliquant la stratégie générale ;
- soit est tel qu'aucune stratégie ne peut garantir un regret uniformément en $o(n)$.

Piccolboni et Schindelhauer '01 exhibent un algorithme exécutant la réduction de $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$ vers $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$.

Ainsi, en général, la stratégie proposée et l'ordre de grandeur $n^{2/3}$ pour le regret sont optimaux.

Optimalité : cette condition de reconstruction...

Une modification immédiate d'un argument avancé par Piccolboni et Schindelhauer '01 conduit à l'alternative suivante.

Théorème. Tout problème de prédiction $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$

- soit se ramène à un problème $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$ pas plus difficile, avec $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{K}' \, \boldsymbol{H}'$, de sorte que le regret peut être borné par $O_{\mathbb{P}}(n^{2/3})$ dans le problème originel, en appliquant la stratégie générale ;
- soit est tel qu'aucune stratégie ne peut garantir un regret uniformément en $o(n)$.

Piccolboni et Schindelhauer '01 exhibent un algorithme exécutant la réduction de $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{H})$ vers $(\boldsymbol{L}', \boldsymbol{H}')$.

Ainsi, en général, la stratégie proposée et l'ordre de grandeur $n^{2/3}$ pour le regret sont optimaux.

Dans certains cas particuliers (information complète, bandits manchots), cet ordre de grandeur peut être amélioré en $\sqrt{n}$.

Agrégation séquentielle de prédicteurs

Fonctions de pertes convexes

Désormais, on va supposer quelque chose de la fonction de perte ℓ.

(Ci-dessus, notamment dans le cas des jeux de bandits manchots, on n'avait même pas besoin de supposer quoi que ce soit sur ℓ, ni qu'elle était régulière en aucun sens, ni même qu'elle était connue du statisticien !)

Fonctions de pertes convexes

Le jeu de prédiction se déroule ainsi : à chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, simultanément, et chacun en secret, le statisticien choisit sa prédiction $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X}$ et l'adversaire détermine l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$.

Les pertes sont alors calculées, et le statisticien cherche à minimiser son regret,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, y_t)$$

i.e., à assurer qu'il est un $o(n)$.

Fonctions de pertes convexes

Le jeu de prédiction se déroule ainsi : à chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, simultanément, et chacun en secret, le statisticien choisit sa prédiction $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X}$ et l'adversaire détermine l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$.

Les pertes sont alors calculées, et le statisticien cherche à minimiser son regret,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, y_t)$$

i.e., à assurer qu'il est un $o(n)$.

On se place dans le cas où l'ensemble des prédictions $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ est convexe, et $\ell(\,\cdot\,, y)$ est convexe et différentiable pour tout $y \in \mathcal{Y}$.

Le minimum sur $\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}$ est ainsi un minimum sur un ensemble bien plus gros que dans les parties précédentes, où il n'y avait qu'un nombre fini d'experts.

Fonctions de pertes convexes

Le jeu de prédiction se déroule ainsi : à chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, simultanément, et chacun en secret, le statisticien choisit sa prédiction $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X}$ et l'adversaire détermine l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$.

Les pertes sont alors calculées, et le statisticien cherche à minimiser son regret,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, y_t)$$

i.e., à assurer qu'il est un $o(n)$.

On se place dans le cas où l'ensemble des prédictions $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ est convexe, et $\ell(\,\cdot\,, y)$ est convexe et différentiable pour tout $y \in \mathcal{Y}$.

On a alors, pour tous $\boldsymbol{p}_t$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}$ et $y_t \in \mathcal{Y}$, que

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \ell(\boldsymbol{u}, y_t) \leqslant \nabla \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{u})$$

Fonctions de pertes convexes

Le regret est borné linéairement comme suit,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, y_t) \leqslant \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \nabla\ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{u})$$

Fonctions de pertes convexes

Le regret est borné linéairement comme suit,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, y_t) \leqslant \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \nabla \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{u})$$

On suppose dans un premier temps que $\mathcal{X}$ est le simplexe de $\mathbb{R}^N$. On note $\delta_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ses points extrémaux :

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \nabla \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{u}) &= \max_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \nabla \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \delta_j) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \widetilde{\ell}(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \widetilde{\ell}(j, y_t) \end{aligned}$$

où $\widetilde{\ell}$ est définie par $\widetilde{\ell}(j, y_t) = \big(\nabla \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t)\big)_j$.

Fonctions de pertes convexes

Le regret est borné linéairement comme suit,

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, y_t) \leqslant \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \nabla\ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{u})$$

On suppose dans un premier temps que $\mathcal{X}$ est le simplexe de $\mathbb{R}^N$. On note $\delta_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ses points extrémaux :

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \nabla\ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{u}) &= \max_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \nabla\ell(\boldsymbol{p}_t, y_t) \cdot (\boldsymbol{p}_t - \delta_j) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \widetilde{\ell}(\boldsymbol{p}_t, y_t) - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \widetilde{\ell}(j, y_t) \end{aligned}$$

où $\widetilde{\ell}$ est définie par $\widetilde{\ell}(j, y_t) = \big(\nabla\ell(\boldsymbol{p}_t, y_t)\big)_j$.

Vu que $\boldsymbol{p}_t$ est dans le simplexe, les résultats précédents s'appliquent et livrent une stratégie dont le regret est de l'ordre de $\|\nabla\ell\|_\infty \sqrt{n \ln N}$.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On dispose de N valeurs boursières et on part d'un capital d'un euro. Au jour t, l'allocation des capitaux entre les N valeurs est donnée par la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On dispose de N valeurs boursières et on part d'un capital d'un euro. Au jour t, l'allocation des capitaux entre les N valeurs est donnée par la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

Si la valeur j a un taux de croissance au jour t de $y_{j,t} \in \mathbb{R}_+$, et $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{y}_{1,t}, \ldots, \boldsymbol{y}_{N,t})$, alors l'allocation $\boldsymbol{p}_t$ voit sa mise multipliée par $\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t = p_{1,t}y_{1,t} + \ldots + p_{N,t}y_{N,t}$.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On dispose de N valeurs boursières et on part d'un capital d'un euro. Au jour t, l'allocation des capitaux entre les N valeurs est donnée par la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

Si la valeur j a un taux de croissance au jour t de $y_{j,t} \in \mathbb{R}_+$, et $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{y}_{1,t}, \ldots, \boldsymbol{y}_{N,t})$, alors l'allocation $\boldsymbol{p}_t$ voit sa mise multipliée par $\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t = p_{1,t}y_{1,t} + \ldots + p_{N,t}y_{N,t}$.

Au bout de n jours, la suite d'allocations $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ obtient

$$W_n = \prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t$$

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On dispose de N valeurs boursières et on part d'un capital d'un euro. Au jour t, l'allocation des capitaux entre les N valeurs est donnée par la probabilité $\boldsymbol{p}_t$.

Si la valeur j a un taux de croissance au jour t de $y_{j,t} \in \mathbb{R}_+$, et $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{y}_{1,t}, \dots, \boldsymbol{y}_{N,t})$, alors l'allocation $\boldsymbol{p}_t$ voit sa mise multipliée par $\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t = p_{1,t}y_{1,t} + \ldots + p_{N,t}y_{N,t}$.

Au bout de n jours, la suite d'allocations $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n$ obtient

$$W_n = \prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t$$

On se compare au meilleur portefeuille constant de placement $\boldsymbol{u}$, qui répartit chaque jour ses capitaux selon $\boldsymbol{u}$.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On se compare au meilleur portefeuille constant de placement $\boldsymbol{u}$, qui répartit chaque jour ses capitaux selon $\boldsymbol{u}$.

Formellement (voir Cover '91, Cover et Thomas '91), avec les notations précédentes,

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = -\log\left(\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t\right)$$

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On se compare au meilleur portefeuille constant de placement $\boldsymbol{u}$, qui répartit chaque jour ses capitaux selon $\boldsymbol{u}$.

Formellement (voir Cover '91, Cover et Thomas '91), avec les notations précédentes,

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = -\log\left(\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t\right)$$

et on cherche à investir de telle sorte que

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) - \min_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}_t) = \max_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{X}} \log \frac{\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}_t}{\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t} = o(n)$$

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

On se compare au meilleur portefeuille constant de placement $\boldsymbol{u}$, qui répartit chaque jour ses capitaux selon $\boldsymbol{u}$.

Formellement (voir Cover '91, Cover et Thomas '91), avec les notations précédentes,

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = -\log(\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t)$$

et on cherche à investir de telle sorte que

$$\sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) - \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \sum_{t=1}^{n} \ell(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}_t) = \max_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{X}} \log \frac{\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y}_t}{\prod_{t=1}^{n} \boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{y}_t} = o(n)$$

Les résultats précédents s'appliquent à condition que l'on fixe deux paramètres m et M, et considère toutes les suites $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots$ avec $\boldsymbol{y}_t \in [m, M]^N$.

On obtient alors l'algorithme EG de Helmbold, Haussler, Singer et Warmuth '98 (voir également Stoltz et Lugosi '03).

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

Ce problème est un problème d'agrégation de prédicteurs dès que $y_{j,t} = \boldsymbol{q}_{j,t} \cdot \boldsymbol{x}_t$, c'est-à-dire que chacun des j est en fait une stratégie primaire d'investissement (sur les valeurs données par les $\boldsymbol{x}_t$).

Exemples : agrégation de prédicteurs

Investissement dans le marché boursier :

Ce problème est un problème d'agrégation de prédicteurs dès que $y_{j,t} = \boldsymbol{q}_{j,t} \cdot \boldsymbol{x}_t$, c'est-à-dire que chacun des j est en fait une stratégie primaire d'investissement (sur les valeurs données par les $\boldsymbol{x}_t$).

On combine alors séquentiellement ces stratégies primaires pour former les $\boldsymbol{p}_t$, et on obtient des performances presqu'aussi bonnes que la meilleure combinaison linéaire constante de ces stratégies : c'est du méta-apprentissage.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Régression linéaire séquentielle :

Ici, $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{x}_t,\, z_t) \in [-B, B]^N \times [-B, B]$, $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, et

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = (\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}_t - z_t)^2$$

Exemples : agrégation de prédicteurs

Régression linéaire séquentielle :

Ici, $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{x}_t,\, z_t) \in [-B,B]^N \times [-B,B]$, $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, et

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = (\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}_t - z_t)^2$$

A nouveau, les techniques précédentes s'appliquent, et le regret par rapport aux combinaisons linéaires fixes dans le simplexe est de l'ordre de $B^2\sqrt{n \ln N}$.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Régression linéaire séquentielle :

Ici, $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{x}_t,\, z_t) \in [-B, B]^N \times [-B, B]$, $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, et

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = (\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}_t - z_t)^2$$

A nouveau, les techniques précédentes s'appliquent, et le regret par rapport aux combinaisons linéaires fixes dans le simplexe est de l'ordre de $B^2\sqrt{n \ln N}$.

Haussler et Warmuth '98 expliquent comment étendre ce résultat aux combinaisons linéaires fixes prises dans une boule ℓ^1 de rayon choisi U ;

Exemples : agrégation de prédicteurs

Régression linéaire séquentielle :

Ici, $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{x}_t,\, z_t) \in [-B, B]^N \times [-B, B]$, $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, et

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = (\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}_t - z_t)^2$$

A nouveau, les techniques précédentes s'appliquent, et le regret par rapport aux combinaisons linéaires fixes dans le simplexe est de l'ordre de $B^2\sqrt{n \ln N}$.

Haussler et Warmuth '98 expliquent comment étendre ce résultat aux combinaisons linéaires fixes prises dans une boule ℓ^1 de rayon choisi U ; il suffit de considérer $(\boldsymbol{x}'_t,\, z_t)$ au lieu des $(\boldsymbol{x}_t,\, z_t)$ pour construire les $\boldsymbol{p}_t$, où

$$\boldsymbol{x}'_t = (Ux_{1,t}, \ldots, Ux_{N,t}, -Ux_{1,t}, \ldots, -Ux_{N,t})$$

puis de choisir $\boldsymbol{u}_t$ défini par $u_{i,t} = U(p_{i,t} - p_{i+N,t})$; car

$$\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}'_t = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{x}_t$$

Exemples : agrégation de prédicteurs

Régression linéaire séquentielle :

Ici, $\boldsymbol{y}_t = (\boldsymbol{x}_t,\, z_t) \in [-B,B]^N \times [-B,B]$, $\boldsymbol{p}_t \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, et

$$\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{y}_t) = (\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}_t - z_t)^2$$

A nouveau, les techniques précédentes s'appliquent, et le regret par rapport aux combinaisons linéaires fixes dans le simplexe est de l'ordre de $B^2\sqrt{n \ln N}$.

Haussler et Warmuth '98 expliquent comment étendre ce résultat aux combinaisons linéaires fixes prises dans une boule ℓ^1 de rayon choisi U ; il suffit de considérer $(\boldsymbol{x}'_t,\, z_t)$ au lieu des $(\boldsymbol{x}_t,\, z_t)$ pour construire les $\boldsymbol{p}_t$, où

$$\boldsymbol{x}'_t = (Ux_{1,t}, \ldots, Ux_{N,t}, -Ux_{1,t}, \ldots, -Ux_{N,t})$$

puis de choisir $\boldsymbol{u}_t$ défini par $u_{i,t} = U(p_{i,t} - p_{i+N,t})$; car

$$\boldsymbol{p}_t \cdot \boldsymbol{x}'_t = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{x}_t$$

De telles méthodes ont été utilisées par Mallet et Sportisse '05 en prévision d'ensemble de pics d'ozone.

Exemples : agrégation de prédicteurs

Appel : vos bonnes idées d'applications sont bienvenues...

Lien avec les inégalités oracle exactes

On a pour l'instant pris soin de ne pas postuler de loi sur les observations.

Cependant, par exemple lorsqu'elles sont i.i.d., les résultats ci-dessus (pour des fonctions de perte convexe) impliquent des inégalités oracle exactes.

Lien avec les inégalités oracle exactes

Théorème : Soit $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n$ les prédictions dans $\mathcal{X}$ de la suite d'observations $y_1, \ldots, y_n$, et $\bar{\theta}_n$ leur moyenne. Alors, si les y_t sont les réalisations d'un processus i.i.d. (quelle que soit sa loi),

$$\mathbb{E}\left[\ell\left(\bar{\theta}_n, Y\right)\right] \leqslant \min_{\theta \in \mathcal{X}} \mathbb{E}\left[\ell\left(\theta, Y\right)\right] + \square \sqrt{\frac{\ln N}{n}}$$

Lien avec les inégalités oracle exactes

Théorème : Soit $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n$ les prédictions dans $\mathcal{X}$ de la suite d'observations $y_1, \ldots, y_n$, et $\bar{\theta}_n$ leur moyenne. Alors, si les y_t sont les réalisations d'un processus i.i.d. (quelle que soit sa loi),

$$\mathbb{E}\left[\ell\left(\bar{\theta}_n, Y\right)\right] \leqslant \min_{\theta \in \mathcal{X}} \mathbb{E}\left[\ell\left(\theta, Y\right)\right] + \Box \sqrt{\frac{\ln N}{n}}$$

Preuve : ... Une borne dans le cas le pire donne une borne en espérance ! ...

Remarque : $\mathcal{X}$ est au moins le simplexe, parfois un ensemble plus gros (une boule ℓ^1 en régression linéaire séquentielle).

Lien avec les inégalités oracle exactes

Théorème : Soit $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_n$ les prédictions dans $\mathcal{X}$ de la suite d'observations $y_1, \ldots, y_n$, et $\bar{\theta}_n$ leur moyenne. Alors, si les y_t sont les réalisations d'un processus i.i.d. (quelle que soit sa loi),

$$\mathbb{E}\left[\ell\left(\bar{\theta}_n, Y\right)\right] \leqslant \min_{\theta \in \mathcal{X}} \mathbb{E}\left[\ell\left(\theta, Y\right)\right] + \square \sqrt{\frac{\ln N}{n}}$$

Preuve : ... Une borne dans le cas le pire donne une borne en espérance ! ...

Remarque : $\mathcal{X}$ est au moins le simplexe, parfois un ensemble plus gros (une boule ℓ^1 en régression linéaire séquentielle).

Juditsky, Nazin, Tsybakov et Vayatis '05 proposent une analyse directe, qui conduit à une inégalité oracle exacte avec un facteur constant légèrement meilleur.